This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

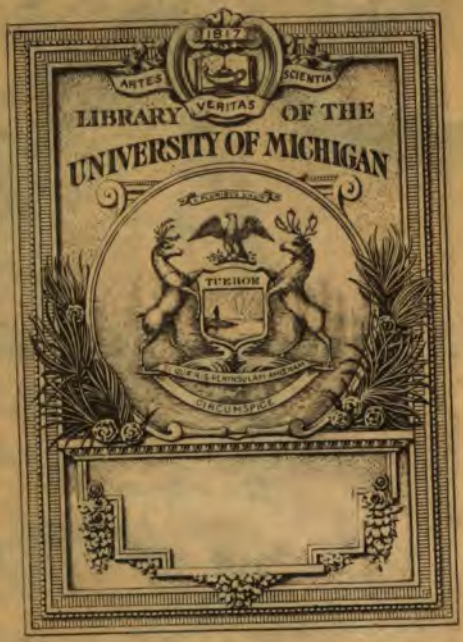
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

QA
35
.B3

Digitized by Google

Digitized by Google

Johann Bernhard Basedows

bewiesene

Grundsätze

der reinen

Mathematik.

Zweyter Band.

Geometrie

und Etwas

von dem Unendlichen.

Leipzig, 1774.

Bey Siegfried Lebrecht Crusius.

Digitized by Google

Digitized by Google

Schöningh
7-11-28
17503

Vorrede
zur Geometrie.

Ich beziehe mich auf die Vorrede zum ersten Theil. Man lasse die Jugend mit Instrumenten auf dem Papiere oder auf einer Tafel, oder im Garten arbeiten, und sage anfangs nur gelegentlich das Leichtere, wodurch gute Einsicht befördert werden kann. Man muß dabey alle mathematische Körper (und zwar auf die mächtige Weise trennbar und zusammensetzbar) bey der Hand haben: So oft man in den Vorfällen des Lebens Gelegenheit hat, muß man dem Lernenden zeigen, wie viel Nützliches und Angenehmes man aus geometrischen Grundsätzen schliessen könne. Das sehr brauchbare Werk des Herrn Büsch giebt vortreffliche Gelegenheit dazu. Das Gesagte sey also der Anfang geometrischer Erkenntnisse bey der Jugend. Alsdann kann man dies theoretische Werk nach der Ordnung und demonstrativ durchgehen. Und wenn nach der Absicht der Erziehung beyde Trigonometrien, und der Vorschmack von dem Unendlichen und der höhern Geometrie, unnöthig wären; so muß man sie übergehen, und allenfalls nur die Schlußfolgen erklären und ins Gedächtniß bringen. Auf die Erleichterung der Lehre von sphärischen Triangeln habe ich besondern Fleiß gewendet, gleichwie auch auf Verkürzung des Unterrichts vom Differenziren und Integriren. Aber Alles ist doch ein Werk von einem, im 49sten Jahre an-

Digitized by Google

fangenden und bald zu andern Geschäften wieder übertretenden, Lehrlinge. Man verzeihe die Wirkungen dieses mir unvermeidlichen Zustandes. Denn ich wiederhole auch hier die mir angenehmere Versicherung, daß ich in jedem andern Theils der Philosophie, von meiner männlichen Jugend an bis jetzund, mit einem seltnen Eifer und Fleisse gearbeitet habe. Als ein Kenner und Lehrer der Philosophie also, der in jedem verborgnen Winkel (und folglich in sehr vielen vergebens) Alles aufgesucht und geprüft hat, was etwa die Methodik und den Unterricht in der Sittenlehre und Religion, und überhaupt im philosophischen Wahrdenken und in richtigen Vermuthungen, vervollkommnen könnte; als ein solcher, sage ich, darf ich nicht furchtsam oder blöde seyn, und, nach der Regel der Aufrichtigkeit, mich auch so nicht stellen. Frankfurt am Mayn, den 16. Sept. 1774.

Digitized by Google

Druckfehler und Anmerkungen zur Geometrie.

Seite 3. Z. 2. für Art: lies, Gröſſe.

— 11. unten Z. 2. ſetze nach zwey noch hinzu gerade.

— 16. Z. 14. für: Zwey Linien, ꝛc. bis §. 8. ſtehe Folgendes: Man multiplicirt 2 Linien, wenn man (nachdem durchgängig ein in allen Exempeln der Linienmultiplication feſtſtehendes Fundamentalmaaß jeder Linie angenommen iſt) die Linien nach dieſem Maaſſe in Zahlen ausdrückt, die Zahlen multiplicirt, und das Product von dem beſtändig feſtſtehenden Maaſſe 1 oder L benahmt. Z. E. das Produkt zweyer Linien von 6 und 8 Zoll, iſt 48 Zoll. Das Product von 3 und 4 Zoll iſt 12 Zoll. Jenes zu dieſem Produkte iſt, wie 4 zu 1. Würde in beyden Fällen der Doppelzoll die Fundamentaleinheit, ſo wäre jenes 12, dieſes aber (1½.2 oder) 3. Das Verhältniß der Producte bleibt.

— 21. Z. 1. ſetze nach und hinzu cb.

— 23. Man ändre den ganzen §. 13. wie folgt: Es ſey (Fig. 4.) pg = pf. So denke man ſich fg als eine Chorde des aus p mit pg oder pf beſchriebenen Bogens. So erhellt, daß jede Linie pc, die aus p auf L zwiſchen den Punkten g und f fällt, kürzer ſey. Nun denke man eine auf L rechtwinkelicht ſtehende Linie pc. So iſt jeder, dem c nahen oder entfernten Linie, pg, auf der

Digitized by Google

andern Seite eine pk gleich, wenn man gc und kc gleich macht, weil alsdann die Triangel sich decken. Also ist pc, als die mittlere Linie, auch kürzer, wie jede pg oder pk. Sie, die rechtwinkelichte, ist der kürzeste Weg, oder die Entfernung von dem Punkte p nach der Linie L.

Seite 33. Z. 3. für: einen nicht spitzigen Winkel; lies: den der größren Seite angemeßnen Winkel.

— 35. Z. 4. für qr auf pr, lies on auf om.

— 37. Z. 17. für c, lies ½ c.

— 57. für mn und on, lies om und mn.

— 59. Am Ende des Absatzes, für §. 34. lies §. 30.

— 72. in dem letzten Absatze von unten lösch weg: und pq; auch die Worte: und Queersinus. Man lösche dieselben zwey Worte weg kurz hernach.

— 73. Z. 2. Man setze hinzu: der Queersinus eines stumpfen Winkels ist die Summe des Radius und des Supplementswinkels.

— 76. unten Z. 13. für ab = me; lies me = ab.

— 79. Am Ende der 15ten Zeile setze hinzu ein Divisionszeichen.

— 80. Z. 7. für Sin, W: 2; lies Sin (W: 2). Ganz unten, für Grad; lies Minuten.

— 86. Z. 14. und 15. lies: Summe derselben, wie der Unterschied ihrer Sinus, zu der Summe der Sinus jener 2 Winkel.

— 87. unten Z. 6. für k lies m.

— 89. Z. 11. für 90 Grad — m, lies (90 Grad — m.)

Seite

Digitized by Google

Seite 95. Z. 10. und 12 für AB und BC; lies AC und CB. Ferner, für AB und AC, lies a c und c b.
— 96. Z. 16. für h a lies b a.
— 110. Z. 8. für Durchmesser lies Halbmesser.
— 132. Z. 4. nach haben: setze hinzu, gleiche Seitenlinien und &c.
— 148. No. 1. lies: Des geraden Cylinders.
— 149. Z. 5. lies, Umkreis der Grundfläche des Kegels.
— 169. Z. 11. für Durchmesser, lies Halbmesser.
— 179. Z. 13. für 90, lies 180.
— 222. Z. 4. für = d g, lies g. Und für unendliche, lies endliche.
— 228. Z. 14. lösch weg Ordnung.
— 242. Z. 6. für (x y d y) lies — (a y d y).
— 243. Z. 4. für §. 23, lies §. 125.
— 244. Z. 8. für = 2 a z, lies = — 2 a z. Und Z. 8. und 9 für = 2 a, lies = — 2 a.
— 246. unten Z. 7. für z p, lies z^p. letzte Zeile, für a + b x^n, lies (a + b x^n)^p.
— 249. unten Z. 4. für y d x . d y, lies y d x : d y.
— 250. unten Z. 6. für n, lies h.
— 251. Z. 7. für $(dx)^2 + (dy)^2$; lies $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$.
— 253. Z. 14. für y z, lies x z.
— 263. unten Z. 8. lies $(\sqrt{t^2 - v^2})dv$. Und unten Z. 5. für $v^{\frac{4}{2}}$, lies $v^{\frac{4}{2}}$.
— 264. Z. 1. lösch weg $-\frac{1}{4}$.
— 265. Z. 1. für d t, lies d t : $(1 + t^2)$.
— 266. Z. 4. für $+ \frac{v^7}{7}$ lies $- \frac{v^7}{7}$. Und statt

des

Digitized by Google

des ersten Absatzes des 128. §. sey Folgendes: Man schneide einen Kegel irgend einer Seitenlinie desselben parallel; so sind die Schenkel des Durchschnitts eine Parabel. Man schneide ihn so, daß die Axe der Schenkel des Durchschnitts, nach gehöriger Verlängerung, und eine Seitenlinie des Kegels zusammenstossen. So machen die Schenkel eine Hyperbole. Man schneide ihn so, daß die Schenkel wieder zusammenlaufen (doch nicht mit der Basis parallel); so hat man eine Ellipse.

Seite 272. In der Mitte für pa^2 lies p^2a.

— 275. Z. 14. für $+x^2$ lies $+\frac{1}{4}a^2$.

— 280. Z. 2. unten für No. 2. lies No. 1. Und für k, lies k^2.

— 281. Z. 2. für a^2z, lies a^2z^2.

— 282. Z. 4 und 7. für z, lies 2.

— 291. unten Z. 11. den Nenner lies $(x-a)^{\frac{1}{2}}$. Und Z. 2. unten für $x=a$, lies $x-a$.

In den Tafeln.

Tab. IV. Fig. 60. In der Mitte des Bogens ab setze man noch f.

— VI. Fig. 92. setze an des Winkels a obersten Schenkel noch h, an den untersten noch l.

— VIII. Fig. 127. In der Linie gh lies l für b.

— IX. Fig. 148. Ausser der Figur, in der Mitte des äussersten Bogens nm, setze h. Und Fig. 150. setze h bey der Mitte des Bogens nm; und wo h steht, setze P.

Geos

Digitized by Google

Bewiesene
Lehrsätze der Geometrie.

Zur

Elementarischen Bibliothek.

Digitized by Google

Digitized by Google

Inhalt der Geometrie.

I. Gründung richtiger Begriffe in der Meßkunst des Raumes.

§. 1. Begriff von Körper, Umfang und Figur; von Fläche und Ebene; von Flächenfigur, Linien und Puncten; geraden und krummen Linien.

§. 2. Die wahre Verschiedenheit jener Dinge und Begriffe.

§. 3. Gleichartigkeit, Gleichheit, Aehnlichkeit und Einerleyheit der Grössen.

§. 4. Unbestimmliche, unaufhörlich zunehmende und abnehmende Grössen. Das unvergleichbar Grosse und Kleine. Das unendlich Grosse und Kleine.

II. Das Erste von Linien, Winkeln, dem Zirkelkraise und Triangeln.

§. 5. Das Fundamentalmaaß einer Grössenart. Das bestimmte Maaß einer Grösse.

§. 6. Das Allgemeine von dem Verhältnisse gleichartiger Grössen. Gleichmässige und ungleichmässige Berechnung.

§. 7. Gebrauch des Zirkels. Eintheilung und Beurtheilung der Linien. Verjüngter Maaßstab.

Zusatz. Von den 4 Rechnungsarten mit Liniengrössen.

§. 8. Erste Begriffe von Zirkelkrais und Zirkelfläche. Mittelpunct, Umfang, Durchmesser, Halbmesser, Quadrant, Grad, Bogen, Sehne, Abschnitt und Ausschnitt.

§. 9. Proportion der zwischen einerley Winkeln liegenden Bogen verschiedener Zirkelkraise.

§. 10. Grösse der Winkel. Transporteur. Rechter und schiefer Winkel. Nebenwinkel. Verticalwinkel.

§. 11. Arten der Triangel.

§. 12. Die gegenseitige Deckung der Figuren.

§. 13. Entfernung eines Aussenpuncts von einer andern Linie.

§. 14. Erfoderliche Linien zu einer Flächenfigur. Die Hypothenuse und gröste Seite.

§. 15. Von Parallellinien.

§. 16. Innerliche, äusserliche, wechselmässige Winkel. Parallellinien ziehen.

III. Gleichheit und Proportion in Linien u. Dreyecken.

§. 17. Im Triangel 180 Grad Winkelgrösse. Winkel an der verlängerten Seite.

Digitized by Google

§. 18. Zeichen der Einerleyheit zweyer Triangel.
§. 19. Von gleichschenkelichten und gleichseitigen Triangeln.
§. 20. Von den Winkeln an dem Umkraise.
§. 21. Halbirung der Linien und Winkel. Errichtung rechtwinkelicht stehender Linien. Winkelhacken.
§. 22. Die größte Seite dem größten Winkel im Triangel gegen über.
§. 23. Erste Sätze von Parallelogrammen.
§. 24. Arten der Parallelogrammen
§. 25. Das Parallelogramm, bestehend aus Triangeln.
§. 26. Gleichheit der Parallelogrammen und Triangel von einerley Grundlinie und Höhe.
§. 27. Der pythagorische Lehrsatz.
§. 28. Von conformirten Triangeln.
§. 29. Von ähnlichen Triangeln.
§. 30. Wie man Proportionallinien findet.
§. 31. Proportionirte Theilung der Linien.
IV. Vom Zirkelkraise und v. seinen Beschaffenheiten.
§. 32. Proportionirte Theilung eines Winkels und seines Bogens durch die Schenkel der kleinern Winkel.
§. 33. Von dem Mittelpunkte und den halbirten Sehnen und Winkeln.
§. 34. Von drey Puncten, und dem Mittelpuncte des Zirkels.
§. 35. Von einigen, durch Hülfe des Zirkelkraises erkennbaren Proportionen.
§. 36. Das Erste von Tangenten.
§. 37. Von regelmässigen Flächenfiguren oder Vielecken.
§. 38. Begriff v. Complement u. Supplement eines Winkels.
§. 39. Erste Sätze von Sinus, Cosinus und Quersinus.
§. 40. Erste Sätze von Tangenten, Secanten, Cotangenten und Cosecanten eines Winkels oder Bogens.
§. 41. Proportion zwischen den Halbmessern, und den gesagten Linien bey Gleichheit der Winkel
§. 42. Proportionen u. gleiche Produkte der gesagten Linien.
V. V. Berechnung der Triangel aus zureich. Gründen.
§. 43. Erfindung der Sinustafeln.
§. 44. Verhältniß der Seiten im rechtwinkelichten Dreyecke
§. 45. Verhältniß der Seiten, wie Sinus.
§. 46. Verhältniß der Seiten zu Tangenten der ihnen angemeßnen Winkel.

§. 47.

Digitized by Google

§. 47. Berechnung des Triangels, wenn eine Seite und die Winkel bekannt sind.

§. 48. Wenn ein rechter Winkel mit seinen Schenkeln bekannt ist.

§. 49. Von Tangenten halber Summen und halber Unterschiede der Winkel.

§. 50. Aus der halben Summe den halben Unterschied zweyer Winkel zu finden.

§. 51. Berechnung, wenn zwey Seiten und ein eingeschlossener Winkel bekannt sind.

§. 52. Wenn zwey Seiten und ein andrer Winkel bekannt sind.

§. 53. Wenn kein Winkel, aber alle 3 Seiten, bekannt sind.

§. 54. Nothwendigkeit der Trigonometrie.

VI. Von der Lage ebener Flächen.

§. 55. Linien, die rechtwinkelicht an eine Ebene stossen. Möglichkeit nur einer einzigen solchen Linie durch denselben Punct.

§. 56. Schlüsse in Ansehung des Parallelisme und der Liniengleichheit paralleler Winkel.

§. 57. Linie mit einer Ebene parallel.

§. 58. Begriffe von Durchschnitt und Winkel der Ebnen.

§. 59. Parallelisme der Ebenen.

§. 60. Proportionirte Theilung der Linien durch parallele Ebenen.

VII. Von Gröſſe und Verhältniß der Flächen.

§. 61. Die vorwärtsliche, rückwärtsliche, seitwärtsliche, parallele und kraisförmige Bewegung einer Linie.

§. 62. Wie dadurch Parallelogrammen, Triangel, Zirkelflächen und Theile derselben umgränzt werden.

§. 63. Von erkannter Gleichheit und Verhältniß der Flächen vermittelst des Flächenmessers.

§. 64. Gleichheit vieler Triangel mit einem einzigen von gleicher Höhe.

§. 65. Vergleichung der Parallelogrammen oder Triangel entweder von gleicher Grundlinie oder von gleicher Höhe.

§. 66. Maaß der Parallelogrammen und Triangel aus dem Producte der Höhen und Grundlinien und aus dem Verhältnisse zu einer Quadratfläche. Anmerkung, wenn die Linieneinheiten abgewechselt werden.

Digitized by Google

§. 67. Sammlung aller Sätze von Gleichheit geradlinichter Flächen.
§. 68. Von Copirung und Umbildung gleicher geradlinichter Flächen.
§. 69. Verhältniß der Flächen, welche die Differenz conformirter Triangel sind.
§. 70. Verhältniß der Flächen in ähnlichen Dreyecken.
§. 71. Gleiches Verhältniß in allen Paaren harmonischer Seiten in ähnlich figurirten geradlinichten Flächen.
§. 72. Verhältniß zweyer ähnlich figurirten Flächen und ihres beyderseitigen Umfanges.
§. 73. Von der Verjüngung oder Verkleinerung einer Flächenfigur.
§. 74. Besonders von dem Entwurfe ähnlicher Flächen-Summen und Flächen-Differenzen.
§. 75. Gleiches Verhältniß aller Durchmesser zu dem Umkraise.
§. 76. Verhältniß des Ausschnittes zu zweyerley Triangeln, deren Grundlinien kleiner und grösser sind, als der Bogen.
§. 77. Verhältniß der Peripherie zu dem Durchmesser.
§. 78. Grösse und Verhältniß der Zirkelfläche und ihrer Theile, der Ausschnitte und Abschnitte.
§. 79. Aehnlichkeit der Zirkelflächen. Ausschnitte, Abschnitte, Folgerung.

VIII. Von den Körpern.

§. 80. Harmonische Punkte zweyer gleichen Flächen. Begriff von einem Prisma.
§. 81. Begriff von Würfel und Parallelepipedum.
§. 82. Vom Cylinder.
§. 83. Von der Pyramide.
§. 84. Von dem Kegel.
§. 85. Begriff von der Kugel und Halbkugel. Durchmesser. Halbmesser.
§. 86. Durchschnitt und Abschnitt. Größre und kleinere Kraise. Ausschnitt.
§. 87. Von der Höhe des Prisma und der Pyramide, des Cylinders und Kegels, von parallelen Durchschnitten derselben und ihrem Verhältnisse zu der Grundfläche.
§. 88. Erkannte Gleichheit der Körper aus der Gleichheit der Streifen, Körpermaaß in dem Producte aus der Grundfläche und Höhe.

§. 89.

Digitized by Google

§. 89. Vergleich. der Körper mit einer Menge kleiner Würfel.
§. 90. Von der mögl. Ausmessung unregelmässiger Körper.
§. 91. Unterschied von Längenmaaß, Quadratmaaß und Cubikmaaß.
§. 92. Verhältniß und Grösse der Pyramiden und Kegel.
§. 93. Die Oberfläche eines Cylinders und des Kegels, auch ihrer Ausschnitte.
§. 94. Die Oberfläche einer Kugel.
§. 95. Der körperliche Inhalt einer Kugel.
§. 96. Von Ausschnitten der Kugel und Halbkugel.
§. 97. Anmerkung von regelmässigen Körpern, deren Oberfläche aus Vielecken besteht, und welche in eine Kugel passen.
§. 98. Von ähnlichen Körpern und ihrem Verhältnisse.
§. 99. Folgerung von Entwürfen zu Körpern, nach vorgeschriebenen Bedingungen.

IX. Umständlichere Betrachtung der Kugel.

§. 100. Erklärung von mancherley Begriffen.
§. 101. Von den grossen Kugelkraisen und ihren Scheiben.
§. 102. Von den kleinern Kugelkraisen und ihren Scheiben.
§. 103. Von den Parallelkraisen und ihren Scheiben.
§. 104. Kugelbogen, der kürzeste Weg zwischen 2 Puncte.
§. 105. Erste Begriffe und Lehrsätze von sphärischen Winkeln.
§. 106. Und von sphärischen Triangeln.
§. 107. Vorbereitung zur Erkenntniß von den rechtwinkelichten sphärischen Triangeln.
§. 108. Von den Arten derselben.
§. 109. Vorbereitung zur Berechnung derselben.
§. 110. Proportionalsätze für dieselben.
§. 111. Vom Gebrauche dieser Sätze bey Berechnung von allerley Arten rechtwinkelichter Triangel.
§. 112. Arten der schiefwinkelichten Triangel.
§. 113. Fortsetzung von Benennung der Seiten und Winkel.
§. 114. Vorgängige Proportionalsätze zur Berechnung schiefwinkelichter Triangel.
§. 115. Sammlung der Fälle, in welchen eine Seite oder ein Winkel gesucht werden kann. Tabelle der nöthigen Proportionalsätze für schiefwinkelichte sphär. Triangel.

X. Einiger Vorschmack der höhern Geometrie.

§. 116. Erster Begriff von der höhern Geometrie.
§. 117. Die ersten Hülfsbegriffe bey krummen Linien. Die Basis und die Applicaten. Die Abscissenlinie. Die Ab-

Digitized by Google

Abscissen. Die Ordinaten und Coordinaten. Die positiven und negativen Ordinaten. Der Durchmesser und die Axe. Die grosse und kleine Axe — die Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale = die Rectificirung und Quadrirung krummer Linien, als das Mittel der Ausrechnung krummer Flächen. Cubirung der Körper von gekrümmter Figur. Der Brennpunct und Parameter.

§. 118 u. §. 119. Von relativisch-unendlich-Kleinen und Grossen. Folgerungen aus diesem Begriffe. Die Infinitesimal-Nulle.

§. 120. Begriff von beständigen und unbeständigen Grössen.

§. 121. Begriff von Functionen; von Ordnungen und Arten der krummen Linien, von logarithmischen und exponentialen Gleichungen, von algebraischen und transcendentischen Functionen und Linien.

§. 122. Der erste Begriff von Differenzial, Integral, Differenziren, Integriren.

§. 123. Regeln und Exempel des Differenzirens.

§. 124. Exempel und Regeln des Integrirens.

§. 125. Allgemeine Anwendung auf krumme Linien. 1) Bestimmung der Subtangente, 2) und der Subnormale, 3) Quadrirung des Raums zwischen krummen Linien, 4) die umgekehrte Methode, 5) die Cubirung der Körper mit krummen Flächen. Exempel einer Rectificirung.

§. 126. Von Bestimmung des Grösten und Kleinsten durch die Function.

§. 127. Betrachtung über den Zirkel durch Differenzialrechnung.

§. 128. Von Kegelschnitten und der Parabel.

§. 129. Von der Ellipse.

§. 130. Von der Hyperbel.

§. 131. Von der Linie f m in allen conischen Sectionen.

§. 132. Radlinie. Ein Exempel der transcendentischen Linien und der Evolution.

§. 133. Muschellinie. Spirallinie. Logistik.

§. 134. Von dem Puncte der Wendung und Wiederkehr.

§. 135. Begriff von geometrischen Oertern und Construction der Gleichungen.

§. 136. Auch von Cardans Regel für cubische Gleichungen.

Digitized by Google

Geometrie.

I.

Gründung richtiger Begriffe in der Meßkunst des Raums.

§. 1.

Ein jeder Körper ist entweder kleiner oder grösser, als ein andrer, oder ihm gleich; er hat also selbst eine ihm eigenthümliche Grösse, welche verglichen werden kann.

Betrachtet man eine körperliche Grösse, ohne sich um andre Beschaffenheiten des Körpers zu bekümmern: so betrachtet man einen mathematischen Körper, welcher nur so heißt, und kein Körper ist.

Betrachtet man dieselbe Grösse, ohne einmal daran zu denken, ob irgend ein Körper diesen Grad der Grösse habe: so heißt sie ein körperlicher Raum.

Ein jeder körperlicher Raum von gewisser Grösse hat nach allen Seiten hin sein Ende, oder von allen

Digitized by Google

Seiten her seinen Anfang. Denkt man alles, was Anfang oder Ende eines Körpers ist, zusammen: so denkt man den körperlichen **Umfang**, die Gränzen oder die **körperliche Figur** desselben.

Wenn ich in diesem Buche das Wort, **Körper**, brauche: so verstehe ich allemal den körperlichen Raum, oder den mathematischen Körper.

Ein Theil des körperlichen Umfanges, der auf gleiche Art in Eins fortgeht, wie die Seiten eines Balkens bis an ihre Ecken, heißt eine **Fläche**; und zwar eine **Ebne**, wenn sie, wie ein gewöhnlicher Spiegel, eben ist: sonst aber **gebogen**, wie die Fläche einer Walze.

Auch die Flächen haben Anfang und Ende, oder einen **Flächen-Umfang**, oder eine **Flächen-Figur**. Die Fläche selbst, und ein jeder Theil derselben, heißt ein **Flächenraum**. Von der Figur derselben heißt ein jeder Theil eine **Linie**. Eine jede Seite oder Fläche eines gewöhnlichen Balkens zum Exempel, hat eine Figur, woran man 4 Linien bemerkt.

Das Ende oder der Anfang einer Linie heißt ein **Punkt**. Zwey Endpunkte hat eine jede Linie, welche man, als Eins, 1, oder als eine einzige ganze ungetheilte Linie sich vorstellt.

Wenn in einer Fläche 2 Linien zusammen laufen, wie an der Ecke einer Seite eines Balkens; so heißt die Art ihrer Vereinigung ein **Linien-winkel**,

Digitized by Google

winkel, oder kurz, ein Winkel. Es sind aber nicht alle Winkel von gleicher Art. Die Fläche der Spielkarte, wenn man sie von Ecke zu Ecke durchschnitten hat, hat an den Orten des Schnitts keine solche Winkel mehr, als vorher.

Eine Linie, deren jeder Theil nur durch die Grösse von dem Ganzen verschieden ist, heißt gerade. Auch ist zwischen zweyen Punkten, welche die Linien an einem Körper haben, die gerade Linie die kürzeste. Eine ungerade Linie aber heißt auch krumm oder gebogen, wie die Linien, die in der Figur der Oberfläche eines runden Brettes angetroffen werden.

§. 2.

Ein jeder Theil einer Linie ist eine Linie, und kein Punkt. Ein jeder Theil einer Fläche ist eine Fläche, und keine Linie; ein jeder Theil eines Körpers ist ein Körper, und keine Fläche.

In einem Punkte ist keine Liniengrösse oder Länge, das ist, der Punkt ist kein Theil der Linie, sondern nur ihre Gränze. Die Linie ist kein Theil der Fläche, sondern nur ihre Gränze; die Fläche ist kein Theil des Körpers, sondern nur seine Gränze.

Denn wenn eine Linie anfängt, wo die andre aufhört; so gehört ein Punkt zu beyden Linien; aber kein Theil der einen Linie gehört zu der andern Linie. Wenn zwey Flächen zusammen stossen, wie die Flächen eines Balkens: so gehört eine Linie zu

Digitized by Google

den Flächen; aber kein Theil der einen Fläche gehört zu der andern Fläche; so wenig als ein Theil von Hansens Acker zu Steffens Acker gehört, ob gleich eine einzige Linie ihre gemeinschaftliche Gränzscheidung ist. Wenn zwey Flächen zweyer marmorner Tafeln aufeinander liegen: so ist eine Fläche beyden Körpern gemeinschaftlich; aber kein Theil dieser Tafel ist ein Theil jener Tafel.

§. 3.

Ein Punkt ist dem andern weder gleich noch ungleich. Denn er hat keine Grösse. Die mit der Feder oder dem Griffel gemachten Punkte sind Flächen; aber solche, von denen man will, daß sie nichts anders, als Punkte, oder als Gränzen der Linien vorstellen sollen. Ein Punkt ist auch dem andern weder ähnlich noch unähnlich, wo man das nicht etwa eine Aehnlichkeit nennen will, daß zwey Punkte nichts anders, als 2 Punkte, sind.

Hiebey ist noch anzumerken, daß eine auf dem Papiere gemachte Linie eigentlich eine Fläche oder ein Streifen ist; man will aber, daß dieser Streifen nichts anders vorstelle, als eine der langen gleichen Linien, welche diesen Streifen endigen.

Die Liniengrösse, oder die Länge, ist nur mit Linien gleichartig; die Flächengrösse nur mit Flächen; die körperliche Grösse nur mit Körpern.

Aehn-

Digitized by Google

Aehnlich sind zwey gleichartige Grössen, wenn kein Unterschied ist, als etwa die Grösse. Wenn in der Grösse kein Unterschied ist; so sind sie gleich. Ein Würfel ist ähnlich dem andern; ein gleichseitiges und gleichwinklichtes Viereck dem andern; eine gerade Linie der andern. Aber das eine Glied eines solchen verglichnen Paares ist dem andern nicht allezeit gleich. Hingegen ist ein Balken gleich allen Brettern, in welche er zerschnitten werden kann, wenn sie auch neben einander liegen; aber ähnlich ist er ihnen nicht. Wenn nun zwey Grössen sowohl ähnlich als gleich sind: so sind sie ganz einerley, wie zwey gleich lange gerade Linien; zwey Flächen, an welchen in der einen und in der andern paarweise gleich grosse Linien, und an denselben (hier und dort) einerley Winkel sind; oder wie zwey gleich grosse Kugeln; zwey gleich lange und gleich dicke Walzen.

§. 4.

Linien ohne Endpunkte, Flächen ohne Endlinien, Körper ohne Endflächen; das sind unmögliche Dinge, die kaum den Namen eines Dinges verdienen, es sind Redensarten von undenkbarer Bedeutung. Wenn man also unter den Redensarten, unendliche Linien, unendliche Flächen, unendliche Körper, nichts anders zu verstehen sucht, als solche unmögliche Dinge; so sind sie unnütz. Ein Ding dieser Art ist eben so wenig unendlich, als ein Körper unkörperlich, oder eine Grösse ungroß ist. Wir

Digitized by Google

wollen also diese Redensarten entweder vermeiden; oder etwas Anders darunter verstehn lernen.

Aber **unbestimmlich groß** ist etwas, dessen Grösse man nicht erforschen kann; **unbestimmlich klein** ist, dessen Kleinheit man nicht erforschen kann. Die Linie von uns zum weitesten Sterne ist **unbestimmlich groß**; die Kleinheit des kleinsten Körpers, der in der Welt ist, ist **unbestimmlich klein**.

Allezeit zunehmend können allerdings Grössen dieser Art seyn, wie die Linie nach dem äussersten Sterne, wenn hinter ihm immer neue Sterne entstehn. **Allezeit abnehmend** können Grössen dieser Art auch seyn, wie wenn von einer Walze immer die Hälfte, und von dem Reste wieder die Hälfte (u. s. w.) abgienge.

Eine jede Grösse von solcher Art, als wir sie denken können, ist also **vermehrbar** und **vermin-derbar**. Man kann sich aber **den Zuwachs als immerwährend vorstellen**, entweder **in Eins fort**, so daß keine merkliche Zeit vergeht, in welcher eine zunehmende Grösse nicht einen Zuwachs erhalten sollte; oder **unterbrochen**, in verschiedenen Zeitpunkten einer unaufhörlichen Zeit. Diese Zusätze, a, b, c, u. s. w. sind entweder untereinander gleich; oder die folgenden werden grösser oder kleiner. Wenn sie nun in geometrischer Progression immer kleiner werden; z. E. wenn der Zusatz b die Hälfte von a, und c die Hälfte von b wäre,

Digitized by Google

wäre, u. s. w. so ist die Summe solcher Zusätze im Ganzen nicht beträchtlicher, als das Doppelte des ersten Zusatzes, wie die Zahlenkunst (§. 83, 84.) lehret. Wenn aber die Zusätze, deren Folge als unaufhörlich angenommen wird, sich gleich bleiben oder grösser werden: so wird die unaufhörlich zunehmende ursprüngliche Grösse, irgend einmal grösser, als alles, dessen Grösse wir uns irgend einmal oder jezund vorstellen können. Der unaufhörliche Zuwachs einer Grösse ist aber niemals ein geendigter Zustand derselben. Sondern solche Grössen, die schon unaufhörlich angewachsen sind, lassen sich gar nicht denken, sondern nur solche, welche unaufhörlich anwachsen werden.

Nach dieser Vorbereitung können wir in der Betrachtung jeder Grössenart, zu dem Begriffe einer solchen Grösse gelangen, die sich von andern Grössen derselben Art sehr unterscheidet, einen besondern Namen verdienet, und ohne Irrthum von den Lehrern der Meßkunst eine unendliche Grösse (dieser oder jener Art) genannt wird.

Nämlich unendlich groß in jeder Grössenart ist dasjenige, was durch einen solchen unaufhörlichen Zuwachs, in dessen Erfolge die zuwachsenden Theile nicht immer kleiner werden, aus einer endlichen oder ermeßlichen Grösse werden kann. Dieses unendlich Grosse ist sonder Zweifel grösser, als eine jede einzelne endliche Grösse seiner Art, und als die Summe aller dieser endlichen Grössen, wenn ihre Anzahl festgesetzt ist,

Digitized by Google

und nicht etwa eine unendliche Zahlengrösse, oder dasjenige bedeutet, was aus jeder endlichen Zahl durch unaufhörlichen Zuwachs werden kann.

Man merke diesen Begriff von einer unendlichen Zahl. Dieß Wort bedeutet nicht irgend eine festgesetzte Zahl von Millionen, Billionen, Trillionen; sondern wie gesagt, was aus jeder festgesetzten Zahl werden kann durch unaufhörlichen Zusatz, wenn der Zusatz nicht in einer Reihe abnehmender Brüche besteht, nicht wie $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ und so weiter.

Dieser Begriff von dem unendlich Grossen führt uns auch zu einem wahren und nützlichen Begriffe dessen, was wir unendlich klein nennen können. Unendlich klein in seiner Art ist dasjenige, was eine jede bestimmte ermeßliche Grösse werden kann, wenn man sie unaufhörlich halbiret, verdrittelt, vervierthelt, u. s. w. oder, welches einerley ist, das unendlich Kleine ist der Quotient einer ermeßlichen Grösse, wenn man sich eine, durch eine unendlich grosse Zahl geschehene, Division derselben vorstellt.

Das unendlich Grosse ist niemals schon wirklich; aber wir denken es mit Wahrheit gröſſer, als jede ermeßliche, feststehende, oder nicht unaufhörlich zunehmende Grösse seiner Art.

Das unendlich Kleine aber ist als ein unendlich kleiner Theil wirklich da in denen Grössen seiner Art, die nicht unendlich klein sind, und deren Grösse für uns beträchtlich seyn kann.

Man

Digitized by Google

Man nenne eine unendlich grosse Zahl ein $\overline{m}$; und den Bruch $1:\overline{m}$ ein d; eine bestimmte ermeßliche Grösse aber ein g: so wird $\overline{m}g$ das unendlich Grosse von der Art g bedeuten. Z. E. wenn g eine nach Norden gehende Linie ist, so wird $\overline{m}g$ eine unendliche Linie dieser Art seyn. Wenn wir aber dg schreiben; so soll das so viel seyn, als $(1:\overline{m})$ g, oder als $g:\overline{m}$, das ist, als das unendlich Kleine von der Art g; so daß wenn g eine gerade Linie bedeutet, dg eine unendlich kleine Linie dieser Art bedeuten muß.

Das unendlich Kleine einer Art ist unterschieden von einem sehr kleinen Theile einer Grösse, welcher zwar einzeln, oder in einer nicht gar grossen Anzahl, uns nicht beträchtlich ist, aber in einer grossen endlichen Anzahl es seyn würde; wie der Sandkorn in einem grossen Berge, oder der Wassertropfen in einem Meere. Denn durch eine endliche Anzahl von Sandkörnern und Wassertropfen wird doch die Grösse des Berges und des Meeres erschöpfet. Hingegen eine endliche festgesetzte, noch so grosse Anzahl von dg ist niemals g, weil $dg = g:\overline{m}$, welches nur vermittelst der Multiplication durch $\overline{m}$, oder durch eine unendlich grosse Zahl, wieder in g verwandelt wird.

Der Nachdenkende aber wird einsehen, daß wenn uns in unsern Geschäfften oder Betrachtungen

Digitized by Google

an einer Größe, die wirklich nennen wollen, gelegen ist, das unendlich Kleine dieser Art, oder das dg, weder einzeln noch in endlicher Anzahl in Betrachtung kommen dürfe. Es ist uns $g \pm 1\,dg \pm 2\,dg \ldots \pm 1000\,dg \ldots \pm n\,dg$, nichts Beträchtliches mehr oder minder als g, so lange n eine endliche ermeßliche Zahl (als Factor) ist. Ein Exempel wird es erläutern. Es sey G oder g die Entfernung zweyer Oerter oder Punkte, dieselbe mag eine Million Meilen, oder ein Zoll seyn. Wenn wir einen unendlich kleinen Theil, sowohl von jenem großen G als von diesem kleinen g uns vorzustellen suchen; das ist, wenn wir an $G:\overline{m}$, und an $g:\overline{m}$, oder an dG und an dg denken; so ist zwar jenes sowohl, als dieses, das unendlich Kleine seiner Art; aber jenes gegen dieses in demselben Verhältniß, als groß G gegen klein g. Dürfen wir also dG nicht achten, wenn G tausend Meilen bedeutet; so dürfen wir auch dg nicht achten, wenn g einen Zoll bedeutet. Und wollte jemand denken, daß eine Million dG oder dg uns doch beträchtlich seyn könnte, wenn gleich ein einziges, oder 100, oder 1000 es nicht wären: so hätte er nicht überlegt, daß dg sey $= g:\overline{m}$, und daß das $\overline{m}$, als eine unendlich große Zahl, so groß angenommen werde, als eine Zahl durch einen unaufhörlichen Zusatz werden kann; oder so groß, daß auch $ng:\overline{m}$, so lange n eine ermeßliche oder wahre Zahl ist, uns nicht beträchtlich seyn kann. Künftig mehr davon!

Digitized by Google

II.

Das erste von Linien, Winkeln, dem Zirkelkraise und Triangeln.

§. 1.

Man wähle von jeder Art der Grösse, z. E. von Linien, von Flächen, von Körpern, irgend eine, welche man Eins nennen will, und deren eigenthümliche Grösse etwa bekannt ist. So ist dieses Eins geschickt, mit allen Grössen derselben Art so verglichen zu werden, daß eine jede gleich ist einer reinen Anzahl, oder einem Bruche, oder einer mit einem Bruche vermischten Anzahl solcher Einheiten. Kurz, ein solches Eins ist alsdann das Fundamentalmaaß solcher Grössen. Z. E. ein Zoll oder eine Elle wird oft zum Längenmaaße der Linien erwählt. Die Zahl, welche, benannt durch das Fundamentalmaaß, anzeigt, wie groß etwas sey, heißt das bestimmte Maaß des Ausgemeßnen. So sind 8 Ellen das bestimmte Maaß des Tuchs von gewisser Breite, das ein Erwachsner zu einem Kleide braucht. So sind 9 Stunden das Maaß der Zeit, in einem ordentlichen Gange von Leipzig nach Halle zu kommen. Das bestimmte Maaß dieser Zeit ist 9, wenn eine Stunde das Fundamentalmaaß ist; es würde 540 seyn, wenn eine Minute das Fundamentalmaaß wäre.

§. 6.

Wenn, auf einander gelegt, zwey Linien oder zwey Flächen sich einander so decken, daß keine

von

von beyden, von welcher Seite her man sie auch betrachtet, hervorragt: so sind sie gleich. Die Flächen, davon eine jede in Eins fort bis an die äusserste Figur geht, sind also gleich, wenn ihre Figuren sich decken.

Was einem von vielen gleichen Dingen gleich ist, ist einem jeden derselben gleich. So ist auch das, was einem unter ihnen ungleich ist, einem jeden unter ihnen ungleich. Das Grössere, als irgend eines unter ihnen, ist grösser, als ein jedes; das Kleinere aber kleiner, als ein jedes, und zwar (§. 3.) in gleichem Maaße.

Eine jede Grösse a aber verhält sich zu einer andern ihrer Art b, wie die Zahlen, welche kommen, wenn man das bestimmte Maaß des a und des b gleichmäßig, oder nach einerley Fundamentalmaaß (§. 5.) berechnet. Der Weg von Leipzig nach Halle sey $4\frac{1}{2}$ Meilen; der Weg von Halle nach Dresden sey 14 Meilen: so verhält sich $a : b = 4\frac{1}{2} : 14 = 1 : 3\frac{1}{9}$.

Hat man aber zwey gleichartige Grössen ungleichmäßig gemessen oder berechnet, z. E. a nach Wegesstunden, b nach Schritten. Alsdann ist, (nach Voraussetzung, daß eine Meile 2 Stunden, aber 12000 Schritte halte) das bestimmte Maaß von a die Zahl 9, von b aber 168000: und alsdann verhält sich a zu b nicht wie diese Zahlen; sondern man muß erst, (weil das Fundamentalmaaß ungleich ist,) wie die Zahlenkunst lehrt, eine dieser

dieser Grössen der andern gleichenämig machen. Weil eine Stunde Weges 6000 Schritte hat; so verhält sich a : b = (9 . 6000) : 168000 = 54 : 168. Das ist ebenfalls wie 9 : 28 oder wie 4½ : 14.

Bey dem Grössenverhältnisse aber wird weder die Aehnlichkeit, noch die Menge und Ordnung der Theile der verglichnen Grössen in Betrachtung gezogen; sondern nur die vereinigte oder summirte Grösse aller Theile in einer jeden. Manches Stück Feldes ist dem andern gleich, welches eine sehr verschiedne Figur hat.

§. 7.

Das nothwendigste Werkzeug zur Messung des Raums ist das Zirkelinstrument, oder der Zirkel. Laßt ihr seine Oeffnung eine Zeitlang so bleiben, wie ihr sie gewählt habt; so seyd ihr sicher, daß alle gerade Linien, in deren beyde Punkte ihr die Schenkel des so eröffneten Zirkels setzen könnt, gleich sind, und daß ihr gleiche Linien macht, wenn ihr mit den Schenkeln Punkte bezeichnet und zwischen denen Punkten durch Hülfe des Lineals gerade Linien zieht.

Auch gröſſere und kleinere Linien kann man durch den Gebrauch des Zirkels unterscheiden, und fast ausmessen. Will man — Fig. 1. — das Verhältniß der Linien ab, AB, cd, ef, wissen; so mache man eine kleine Oeffnung des Zirkels, und wähle die Linie, die zwischen den Punkten der Schenkel seyn kann, oder einen solchen Schritt des

Zirkels

Zirkels zum Fundamentalmaasse (§. 5.) aber zur Einheit, nun gebe jeden Linie ihre Zahl Schritte; so verhalten sich zwey und zwey, wie ihre Zahlen. Die verschiedenen Summen aber, und Differenzen dieser Linien, verhalten sich, wie die Summen und Differenzen der Zahlen, wodurch die Zirkelschritte gezählet sind.

Durch Hülfe des Zirkels kann man auch verschiedene verlangte Abtheilungen der Linien machen, besonders wenn es nicht darauf ankömmt, ob ein einziger Theil der Linie um ein Härchen kleiner oder grösser ist, als er seyn sollte. Von genauern Abtheilungen wird erst hernach gehandelt.

Es kann aber jede Linie in eine verlangte Anzahl Theile getheilt, oder wenigstens getheilt gedacht werden, wenn wir gleich weder wahre Linien machen, noch sehr kleine Theile derselben unterscheiden können. Es sey — Fig. 2. — die Linie cd in 5 gleiche Theile zu theilen: so öffnet den Zirkel nach Vermuthen, daß solcher Schritte 5 in der Linie seyn werden. Ihr irrt zwar, aber könnt durch einige Veränderung des Zirkels euren Irrthum so klein machen, daß er euch nicht angeht. Merkt alsdann die Punkte der Schritte; so habt ihr die verlangte Abtheilung.

Leichter ist es, eine gleiche Linie in solche Theile zu theilen, als eine andre schon getheilt ist. Denn die letzte zeigt uns die Grösse der nöthigen Oeffnung des Zirkels.

Weil

Weil man nun jede Linie in eine verlangte Anzahl gleicher Theile theilen kann; (ob ich gleich noch nicht von der beſten Art rede,) ſo iſt es auch möglich, eine jede Linie mit einer andern proportionirlich einzutheilen; ſo daß ſich immer —Fig. 3.— in einem dazu beſtimmten Paare, (welches aus einem Theile der erſten und aus einem Theile der zweyten Linie beſteht,) jener Theil zu ſeinem Ganzen, wie dieſer Theil zu dem ſeinigen verhalte, und daß alſo, wenn die Theile der erſten Linie, welche L heiſſen mag, AB, BC, CD, und die Theile der letzten Linie, welche l ſey, ab, bc, cd ſind, ſich verhalte L : l = AB : ab = BC : bc = CD : cd, u. ſ. w. Geſetzt BC wäre $\frac{1}{7}$ in L. Man ſucht den fünften Theil in l, und ſetzt ihn dreymal, ſo iſt bc auch $\frac{1}{7}$ in l.

Auf dem Felde iſt das Fundamentalmaaß (§. 5.) der Länge eine Ruthe, die etwa 5 bis 6 Ellen hält. Die Ruthe hat 10 Fuß, der Fuß 10 Zoll, der Zoll 10 Linien. Wird vom Längenmaaße geſchrieben: $15, 5, 7, 9$; ſo leſet: 15 Ruthen, 5 Fuß, 7 Zoll, 9 Linien. Nach den Regeln der Decimalbrüche könnte man ſchreiben: 15,5799, wenn 1 Ruthen bedeutet, wenn Totalzahlen vor dem Comma ſtehen, und wenn Zehntheil, Hundertheil und Tauſendtheil nachfolgen. Wenn man nun einen verjüngten Maaßſtab hat, auf welchem eine der gröſſern Linien gleichfalls in Zehntheil, ein Zehntheil abermals in ſeine Zehntheil, u. ſ. w. abgetheilt iſt: ſo kann man allemal Linien auf dem Papiere zuſammenſetzen, die ſich zu einander ſo verhalten,

halten, wie gröſſre Linien, die auf dem Felde abgemeſſen ſind, oder abgemeſſen werden ſollen. Die Art kann man nur durch den Gebrauch des Maaßſtabes zeigen.

Zuſatz zu §. 7.

Es iſt kein Zweifel, daß Addition und Subtraction, wie mit Zahlen, alſo auch mit allerley Art von Gröſſen, z. E. mit Linien, vorgenommen werden kann, ohne ihr Verhältniß einmal durch Zahlen auszudrücken. Man hat einen wahren Begriff von der Summe zweyer Linien, und von dem Ueberſchuſſe einer längeren über eine kürzere.

Zwey Linien durch einander multipliciren, wäre, das beſtimmte Maaß einer jeden nach einerley Fundamentalmaaß (§. 5.) in Zahlen ausdrücken, die Zahlen multipliciren, und dem Producte den Namen des Fundamentalmaaßes geben. Z. E. das Product zweyer Linien zu 6 und zu 8 Zoll, wäre 48 Zoll, wenn der Zoll das Fundamentalmaaß iſt. Iſt aber 2 Zoll das Fundamentalmaaß; ſo wird 6 nur 3, und 8 wird 4; und das Product nur 12. Iſt ein Halbzoll das Fundamentalmaaß; ſo wird 6 in 12, und 8 in 16 verwandelt; und das Product wird 192. Man ſieht alſo, das Product zweyer Linien, als Linien, läßt ſich nicht beſtimmen, iſt auch nicht von einerley Gröſſe. Denn im erſten Falle war derſelben Linien Product 48 Zoll; im andern nur 12 Doppelzolle, oder nur 24 Zoll; im dritten 192 Halbzolle,

zolle, oder 96 Zoll. Inzwischen, wenn das Product eines Paars von Linien, dem Producte eines andern Paars, bey Annehmung deſſelben Fundamentalmaaſſes gleich iſt: ſo ſind dieſe Producte immer gleich, bey jedem in beyden Fällen gemeinſchaftlichen Fundamentalmaaſſe. Das Paar von 6 und 8 Zoll, und das Paar von 3 und 16 Zoll, bleiben in ihren Producten ſich immer gleich; es mag ein einzelner Zoll, oder ein Doppelzoll, oder ein Halbzoll das gemeinſchaftliche Fundamentalmaaß ſeyn. Und wenn das Product und ein Factor in Linien feſt ſteht: ſo iſt der andre Factor beſtimmt. Soll zu einer Linie von 48 Zoll eine Linie von 6 Zoll ein Factor ſeyn: ſo kann nur die Linie von 8 Zoll den zweyten Factor vorſtellen. Denn die beyden Factoren a und b zu dem Producte c müſſen ſo beſchaffen ſeyn, daß das Verhältniß C : a = b; und daß C : b = a; wenn a und b und c nach einerley Fundamentalmaaße geſchätzt werden.

§. 8.

Ein Zirkelkrais, oder eine zirkelmäßige Peripherie, iſt eine krumme Linie, deren ein jeder Theil von einem gewiſſen Punkte derſelben Ebne gleich weit entfernt iſt, und welche eine Zirkelfläche ganz einſchlieſſet. Ein ſolcher Krais iſt die krumme Linie — Fig. 5. — ABCDA. Sie iſt allenthalben von dem Punkte m, oder dem Mittelpunkte (Centrum) gleich weit entfernt. Eine jede gerade Linie von dem Umkraiſe durch den Mittelpunkt wieder in den Umkrais,

heißt ein **Durchmesser** oder **Diameter**, als AC, BD, oder eh, welche (weil sie allesamt das Doppelte der Linie von dem Mittelpunkte in den Umkrais sind) in derselben Zirkelfläche einander gleich sind; eben so, wie die **Halbmesser** (**Radius**) oder **Semidiameter**, Am, Bm, Cm, Dm, em, fm, gm, deren ein jeder durch den Mittelpunkt und den Umkrais umgränzt wird, und einem jeden andern unter ihnen gleich ist.

Den Zirkelkrais pflegt man abzutheilen in 4 gleiche **Quadranten**, welche, auf einander gelegt, sich einander decken, AB, BC, CD, DA; jeden Quadranten in 90 **Grade**, also den ganzen Krais in 360 Grade; jeden Grad in 60 Minuten, die Minute in 60 Secunden, diese in 60 Tertien, u. s. w. und sie so zu schreiben: $24^{\circ}\ 16'\ 20''\ 14'''$. Man lese 24 Grade, 16 Minuten, 20 Secunden, 14 Tertien.

Einen jeden grossen oder kleinen Theil des Kraises — Fig. 5. — aber nennt man einen **Bogen**. Der Quadrant und sein Doppeltes, der halbe **Zirkelkrais**, A, B, C, sind unter den Bogen die merkwürdigsten. Eine jede gerade Linie von dem Umkraise in den Umkrais, heißt eine **Sehne** oder **Chorde**, wie ge. Die größte Chorde ist der Durchmesser. Der Theil der Zirkelfläche zwischen der Sehne und dem Bogen, wie gBe, heißt ein **Abschnitt**. Der merkwürdigste ist die halbe Zirkelfläche zwischen dem Durchmesser AC, und dem halben

Digitized by Google

halben Kraise, ABC. Aber ein Ausschnitt heißt der Theil der Zirkelfläche zwischen dem Mittelpunkte m, den Schenkeln des daran stossenden Winkels mc und mc, und dem Bogen eC.

Einen solchen Zirkelkrais nun kann man leicht beschreiben, wenn man den einen Schenkel des geöffneten Zirkelinstruments festsetzt, und den andern, mit einer Reißfeder versehnen, Schenkel um jenen ganz herum führt, ohne die Oeffnung zu verändern. Der eine Schenkel macht den Mittelpunkt, der andre den Umkrais; die Entfernung beyder bleibt immer der Oeffnung des Instrumentes gleich.

Zuweilen ist es nur nöthig, Bogen des Zirkelkraises zu machen. — Fig. 6. — Z. E. Wenn ich einen obern Punkt d, und einen untern c, finden wollte, in solcher Lage gegen die Linie ab, daß ac, cb, bd, da, lauter gleiche Linien würden: so öffnete ich den Zirkel über die Hälfte der Linie ab, und machte Bogen, die sich schneiden müssen. Alsdann hätte ich in den beyden Durchschnitten d und c die verlangten Punkte.

§. 9.

Die Kraise und Flächen eines grössern und kleinern Zirkels, welche, wie — Fig. 7. — einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, heißen concentrisch. Die beyden vorgestellten Kraise sollen in derselben Ebene liegen. An diesen Figuren kann man Folgendes zeigen.

Digitized by Google

1) Sowohl ein kleiner Kraiß, als ein grosser, wird (§. 9.) in zwey Halbkraiße, vier Quadranten oder 360 Grade abgetheilet. Aber diese gleichbenamten Abtheilungen sind dort kleiner und hier grösser.

2) Eine dortige und hiesige gleichbenamte Abtheilung, und die beyden ganzen Kraiße, stehen mit einander in Proportion. Denn wie sich verhält ein Grad dort zu dem Ganzen, so verhält sich ein Grad hier zu dem Ganzen. Also ist dieses auch wahr, wenn jeder gleichen Anzahl der dortigen und hiesigen Grade.

3) Wenn nun ein Winkel a aus dem Mittelpunkte, mit verlängerten Schenkeln durch die Punkte des kleinern Kraises b und c, bis in die Punkte des grössern Kraises B und C gezogen wird; so sind diese Bogen und ihre ganzen Kraise proportional; das ist, der kleinere Bogen enthält so viel Grade von seinem Ganzen, als der grösre von dem seinigen. Denn wenn man von dem Mittelpunkte aus, beyde ganze Umkraise durch die Schenkel der Winkel — Fig. 8. — eintheilet; so sind der Theile niemals mehr in einem, als in dem andern Kraise. Daher hat jeder dortige Theil und jeder hiesige Theil, wenn er zwischen demselben Winkel liegt, gleich viel Grade seines ganzen Umkraises.

§. 10.

Nun eignet man dem Winkel eine Grösse zu, nach der Anzahl der Grade des Zirkelbogens, der

Digitized by Google

der zwiſchen ea und ſeinen Schenkeln ſeyn kann, die an ſeiner Spitze c, oder an ſeinem Scheitel zuſammen laufen, — Fig. 9. — wobey es einerley iſt, (§. 9.) ob der Bogen ein Theil eines weiten oder engen Zirkelkraiſes iſt, weil er in allen Fällen eine gleiche Anzahl Grade enthält.

Daher kann man durch den Gebrauch eines Transporteurs, welches der Augenſchein lehren wird, auf dem Papiere einen Winkel von vorgeſchriebener Gröſſe entwerfen, und einen entworfenen meſſen.

Der Winkel, deſſen Maaß ein Quadrant oder 90 Grade ſind, heißt ein rechter Winkel; wie — Fig. 5. — zwiſchen den Linien mA und mB. Ein gröſſerer oder kleinerer Winkel (als ein rechter) heißt ſchief; und zwar jener ſtumpf, wie zwiſchen mA und me; dieſer ſpitzig, wie zwiſchen mA und mg.

Die Winkelgröſſe heiſſe w; ſo iſt dw ein unendlich kleiner Winkel. (§. 4.) Alſo, wenn zwey Linien — Fig. 5. — als mf und mk, nur den Winkel dw machen: ſo kann man ſie, als zuſammenfallende Linien, nach einerley Richtung von m aus, vorſtellen. Eines ſolchen Winkels Maaß iſt 0 Grad. Ferner, wenn ein Winkel ſo ſtumpf iſt, daß nur ein dw an 2 rechten Winkeln fehlt, wie zwiſchen den Linien em und mf; ſo kann man ſie als 2 in einander laufende, oder als eine verlängerte Linie anſehen.

Digitized by Google

Fig. 5. — Der Bogen Ag ist das Maaß des Winkels zwischen mA und mg. Der Bogen gB ist das Maaß des Winkels zwischen den Linien mg und mB. So ist der Bogen Be das Maaß des Winkels zwischen mB und me; und der Bogen eC das Maaß des Winkels zwischen me und mC. Der ganze Halbkrais A, B, C, ist also das Maaß der Summe aller Winkel, die aus dem Mittelpunkte an der einen Seite des Durchmessers AC seyn können, es mögen der kleinern Winkel viele, oder der größern Winkel wenige gedacht werden; z. E. auch nur zwey. Ein solches Paar heißt man in Vergleichung mit einander Nebenwinkel, wie — Fig. 9. — die Winkel c und d, deren Summe 180 Grad beträgt. Also auch, wenn zwey oder hundert Linien sich in einem Punkte — Fig. 8. — durchschneiden, so ist das Maaß der Summe aller Winkel 360 Grad oder der ganze Krais, in welchen die genug verlängerten Schenkel dieser Winkel hinein gehen.

Vertical unter sich nennt man 2 Winkel, welche an dem Punkte des Durchschnittes zweyer Linien gegen einander stehen, und folglich nicht Nebenwinkel sind. Verticalwinkel, (wie — Fig. 9. — c und e, als ein Paar, und d und f, als das andre Paar,) sind sich gleich. Denn $c+d = 180$. Und $c+f = 180$. Also $c+d = c+f$. Daher $d = f$.

§. 11.

§. 11.

Wenn man von dem einem Schenkel eines Winkels in den andern eine gerade Linie zieht: so entsteht eine Figur einer Fläche, welche eben sowohl, wie die Figur selbst, ein Triangel oder ein Dreyeck heißt. Ein Triangel, welcher einen rechten Winkel (§. 10.) hat, (wie — Fig. 10 — der Winkel b ist) heißt rechtwinkelicht; stumpfwinkelicht aber, wie — Fig. 11. — wenn er einen stumpfen Winkel hat, wie bey b. Ein gleichseitiger Triangel hat 3 gleiche Seiten, wie — Fig. 12. — ein gleichschenklichter hat auf bc, oder auf der Grundlinie (welche überhaupt irgend eine der Seiten ist, die man zuerst betrachten will) 2 gleiche Schenkel, wie — Fig. 13. —

§. 12.

Wenn zwey Figuren, folglich auch zwey Triangel sich decken, wie — Fig. 14. — die Triangel A und B und C, falls man die Winkel c und c und c auf einander legt; so sind die Figuren oder Flächen (§. 3 und 6.) einander gleich und einerley. Dazu gehört nun freylich, daß die dortigen und hiesigen Winkel paarweise einander gleich sind, oder mit einander harmoniren. Aber man kann aus wenigen Zeichen das Uebrige schließen. Dazu wollen wir uns vorbereiten.

§. 13.

Erster Satz. — Fig. 4. — Die Entfernung eines Punktes p von einer geraden

Linie L, ist die gerade Linie pc, von p zu demjenigen Punkte in L, der dem p am nächsten ist, wenn L genug verlängert wird. In der ganzen Linie L aber ist dem p kein Punkt so nahe, als c. Und an eben derselben Seite von c, sind in L dem p zwey Punkte nicht gleich nahe. Aber weil die Punkte in L, von c aus, nach beyden Seiten, sich nach und nach mehr von p entfernen; so ist irgend ein Punkt diesseits und irgend ein Punkt jenseits des Punktes c in L, dem Punkte p unfehlbar gleich nahe; z. E. f und g. Ich sage in der ganzen L ist kein Punkt, aus dem die Linie nach p hin, so kurz wäre, als cp; und zwar darum, weil cp auf L rechtwinkelicht steht. Denn die Linien, von p in L hinein, werden an beyden Seiten immer nach und nach grösser, je weiter man von c abweicht. Also ist es schon wahr, wenn auch von c nur um ein unendlich Kleines abgewichen wird.

§. 14.

Dritter Satz. So wenig von zweyen geraden Linien, als von einer einzigen, kann ein Flächenraum eingeschlossen werden. Denn 2 Linien, von denen es geschehen sollte, müßten in ihren Endpunkten an beyden Seiten zusammenfallen. Alsdann sind 2 gerade Linien nur eine einzige.

Wenn eine geradlinichte Flächenfigur verlangt wird: so muß die, oder die vorgeschriebene Grundlinie, nicht so groß seyn, als

als die Summe der übrigen Linien. Denn die Linengrösse der ganzen Flächenfigur, ist die Summe aller Linien, die man findet, wenn man — Fig. 15. — von a über b, c und d wieder nach a mit dem Messen herum kömmt. Nun hat man den kürzesten Weg, der möglich ist, von a nach d, oder von d nach a, durch da. Wäre nun ab + bc + cd nicht grösser, als da; so wären sie zusammen da selbst.

Dritter Satz. Die Hypothenuse, das ist, die (in einem Triangel) einem rechten Winkel gegen überstehende, oder dem rechten Winkel zugemessne Seite, ist grösser, als jede der andern. Man sehe — Fig. 4. — und den ersten Satz. Es ist c ein rechter Winkel, pg die Hypothenuse. Der Punkt p ist keinem Punkte der Linie L so nahe, als dem Punkte c. Also pg > pc. Der Punkt g ist auch aus eben dem Grunde keinem Punkte der Linie cp so nahe, als dem c. Also gp > gc. Daher ist sonder Zweifel die einem stumpfen Winkel zugemessne Seite des Triangels, die grösste unter allen dreyen. — Fig. 16. — Es ist AB länger (in dem stumpfwinkelichten Triangel BGA) als die Hypothenuse Aq des rechten Winkels m + n; und als die Hypothenuse Br, des rechten Winkels n + o: daher länger, als AC oder als CB.

Vierter Satz. Also ist in einem Triangel niemals mehr, als etwa ein einziger rechter oder stumpfer Winkel. Denn wären

gung; so müßten von zweyen Seiten jede die größte unter allen dreyen seyn.

§. 15.

Fünfter Satz. Also laufen zwey Linien, die von einer dritten mit lauter rechten Winkeln durchschnitten werden können, niemals zusammen, z. E. — Fig. 17. — die Linien AB und CD, wenn die r, r, r, r, lauter rechte Winkel seyn können. Denn, wer denken wollte, sie könnten in einem Punkt P zusammen laufen, müßte 2 Hypothenusen in einem Triangel annehmen, und eine jede für die größte der 3 Seiten halten. Solche, in derselben ebnen Fläche, liegende Linien, die niemals zusammen laufen, heissen untereinander parallel, und nähern sich niemals, weil sie sonst endlich zusammenlaufen müßten. Daher ist jeder Punkt einer dieser Linien von der andern Linie immer so weit entfernt, als der Punkt r von r, oder als der Punkt r von r. Folglich, wo man zwischen Parallellinien eine dritte Linie rechtwinkelicht auf der einen stellt: so steht sie auch so auf der andern; und alle solche rechtwinkelichte Zwischenlinien sind gleich lang, als r r, und mn und op. Es ist auch durch denselben Punkt, z. E. durch m, nur eine mit CD parallele Linie möglich, nämlich AmB. Denn die andern durch denselben Punkt laufenden Linien, wie ef, würden AmB schneiden und sich der CD nähern.

nähern. Hingegen ist jede Linie, die einer von zwey Parallellinien parallel ist, es auch der andern. Wenn z. E. GH mit CD parallel ist; so ist sie es auch mit AB. Denn alsdann ist vorausgesetzt, daß x und y, und v und w, und t und u, und q und s, lauter rechte Winkeln seyn können. Daher ist die Linie, die mit einer von vielen parallelen nicht parallel ist, auch mit keiner unter ihnen parallel. Denn in diesem Fall wird voraus gesetzt, daß sie nach zureichender Verlängerung die eine derselben schneide; sie wird also dieselben allesammt nach zureichender Verlängerung schneiden; folglich nicht einer derselben parallel seyn.

Sechster Satz. — Fig. 17. — Zwey, an zwey Parallellinien, z. E. an AB und CD, rechtwinkelicht anstoßende Zwischenlinien, wie mn und op, sind, als das Maaß des Abstandes jener beyden, gleichlang, und untereinander selbst parallel, weil die Verbindungswinkel n und p rechte Winkel sind.

§. 16.

Siebender Satz. Wenn — Fig. 18. — zwey Linien ab und cd von ef durchschnitten werden: so nennt man h und i innerliche Winkel, g und k Aussenwinkel, aber auf einer Seite: wiederum m und n innerliche Winkel, l und o Aussenwinkel, aber auf der andern Seite: einen diesseitigen und jenseitigen innerlichen Winkel, (doch nur solche, die nicht unter einander Nebenwinkel sind, also m und i

als

als ein Paar, und h und n als das andre Paar, nennt man Wechselswinkel. Es sind aber allezeit mit einander verknüpft, erstlich der Parallelismus zweyer Linien, zweytens die Gleichheit der Wechselswinkel, drittens daß auf derselben Seite ein Paar innerliche Winkel zusammen 180 Grad halten, viertens daß ein innerlicher Winkel dem von ihm entfernten Aussenwinkel auf derselben Seite gleich sey; fünftens daß die beyden Aussenwinkel derselben Seite zusammen 180 Grad halten; und sechstens, daß die beyden Aussenwinkel verschiedener Seiten gleich sind.

Das Erste und Zweyte folgt aus einander. Denn — Fig. 19. — sind die Linien ab und cd parallel; so ist (da m und n als rechte Winkel voraus gesetzt seyn sollen) mo = qn; und mp = rn; (nach dem fünften Satze). Es folgt aber die Gleichheit der Winkel (wenn in zweyen Fällen die beyden Schenkel gleich groß sind) aus der Gleichheit der Entfernung der beyden Endpunkte an den Schenkeln. Also, weil mo = qn; so ist p = r, oder gleich seinen Wechselswinkel. So schließt man auch aus der Gleichheit der Linien rn und mp, auf die Gleichheit der Winkel q und o, deren ein jeder, wenn man ihn zu einem rechten Winkel addirt, auch ein Wechselswinkel wird. Sind aber die Wechselswinkel p und r als gleich bekannt, und der Parallelismus der Linien in Zweifel; so ziehe man — Fig. 20. — durch die Mitte von pr, das ist,

durch

durch c, die Linie ag, doch a sey ein rechter Winkel. Nun bedenke man, daß rc = pc ist, und daß diese Linien rc, pc in beyden Triangeln an ihren Enden einerley Winkel haben, indem c = c als vertical, und p = r als Wechselswinkel nach der Voraussetzung. Alsdann lege man durch eine Wendung den obern Triangel in den Raum M, daß c an c liege, und ca an cg anschließe, und daß cp aus c, nach N hin, herunter gehe. Alsdenn wollen wir die beyden Triangel wieder so umwenden, daß der Winkel c auf c liege. So wird cp und cr sich decken, und der gleiche Winkel p auf r liegen; und die Punkte oder Winkel a und g gleichfalls einander decken. Da nun a als ein rechter Winkel angesetzt ist: so muß auch g ein rechter Winkel seyn. Nun ist also bewiesen aus vorausgesetzter Gleichheit der Wechselswinkel, daß die Linie ag an beyden durchschnittnen Linien rechtwinklicht stehe, und daß die letzten also untereinander parallel sind.

Mit dem Zweyten ist das Dritte, nämlich mit der Gleichheit der Wechselswinkel — Fig. 18. — ist dieses beständig und gegenseitig verknüpft, daß die innern Winkel h und i (auf einer Seite) in ihrer Summe 180 Grad betragen. Denn h + m = 180 Grad, als Nebenwinkel. Ist nun m = i; oder sind die Wechselswinkel gleich; so haben h + i, die beyden innern Winkel, eben so viel Grad. Wird aber dieses letzte zuerst vorausgesetzt, nämlich, daß h + i = 180 Grad sey: so folgt, daß, da h + m

auch

Digitized by Google

auch = 180 Grad ist, die Wechselwinkel gleich sind, oder daß m = i.

Auch das Dritte und Vierte folgt aus einander. Z. E. Wenn i + h = 180 Grad, so ist klar, weil als Nebenwinkel g + h auch 180 Grad sind, daß i = g ist. Und umgekehrt, vorausgesetzt, daß g = i; so folgt, daß (da h + g = 180 Grad) auch h + i so viel Grad habe.

Das Vierte und Fünfte folgt abermals auseinander. Ist vorausgesetzt, daß g = i sey, so muß, da k mit seinem Nebenwinkel i zusammen 180 Grad hat, auch k + g so viel Grad halten. Und wird dieß letzte vorausgesetzt; oder ist k + g = 180 Grad; so muß i = g seyn. Denn k + i hat 180 Grad.

Das Fünfte und Sechste folgt auch auseinander. Hat k + g 180 Grad; so ist o = g, weil k und o als Nebenwinkel auch 180 Grad haben. Wird aber zuerst bekannt, daß o = g; so sieht man, daß (gleichwie o + k als Nebenwinkel) also auch g + k 180 Grad haben. Also, wenn von diesen 6 Umständen bey zweyen (von einer dritten Linie durchschnittenen) Linien einer wahr ist, so sind sie es alle; so sind die Linien parallel. Und fehlt hingegen einer dieser Umstände; so fehlen sie alle, und die Linien sind nicht parallel.

Will man —Fig. 18.— einer Linie cd durch einen gewissen Punkt eine Linie ab parallel ziehen:

Digitized by Google

ziehen: so ziehe man eine beliebige Linie durch den Punkt in cd hinein, und gebe der beliebten Linie ef, an derselben Seite, wo sie den Winkel n macht, einen innerlichen Winkel m, der mit n zusammen 180 Grad hält. Doch es giebt auch andre Arten, zu diesem Zwecke zu kommen, und Werkzeug, um einige Mühe zu sparen, z. E. ein Parallellineal.

III.

Gleichheit und Proportion in Linien und Dreyecken.

§. 17.

Es soll seyn — Fig. 21. — ab durch die Spitze mit der Grundlinie ci des Triangels parallel. So sind die Winkel e dem i, und g dem h als Wechselswinkel (§. 16.) gleich. Aber e + f + g sind von 180 Grad, (§. 10.) als die Summe aller Winkel im Halbkraise. Also haben auch i + f + h, oder alle Winkel zusammen, im Triangel 180 Grad, nicht mehr, nicht weniger.

Und verlängert man eine Seite des Triangels, gleichwie hier die Seite hi durch kd: so hat der dadurch verursachte Winkel k so viel Grad, als die beyden Winkel des Triangels zusammen, die von dem neuen Winkel entfernt sind. Denn i + k halten 180 Grad als Nebenwinkel, und i + f + h halten eben so viel Grad, als alle Winkel des Triangels. Also k = f + h.

§. 18.

Digitized by Google

§. 18.

Eines jeden Triangels besondere Beschaffenheit ist schon bestimmt.

1) Durch eine Seite und zwey Winkel, von welchen sie eingeschlossen ist. Es sey — Fig. 22. — bestimmt die Linie ab, mit ihren Winkeln a und b: so ist die Richtung der beyden übrigen Seiten ac und bc, folglich der Punkt c, wo sie sich schneiden, und also endigen werden, und also der ganze Triangel a b c, bestimmt. Es könnte aus den vorausgesetzten Beschaffenheiten dieses Triangels kein andrer werden. Zwar sieht auf dem Papiere der Triangel a b c anders aus, als der Triangel b a c. Aber man lege nur den Winkel b auf a; so werden die Triangel sich decken.

2) Durch eine Seite, durch den ihr zugemessenen oder gegenüberstehenden Winkel, und durch einen der beyden Winkel an der gesagten Seite. Denn ist die Seite ab, der ihr zugemeßne Winkel c, und entweder a oder b bestimmt: so ist (§. 17.) der dritte Winkel; also nebst a auch b, oder nebst b auch a, an der bestimmten Seite a b bestimmt. Und alsdann haben wir den vorigen ersten Fall.

3) Durch einen Winkel und das bestimmte Maaß seiner Schenkel; oder, welches einerley ist, durch zwey Seiten und ihren eingeschlossenen Winkel im Triangel. Was kann — Fig. 23. — aus den Seiten m l und

m n

Digitized by Google

m n anders werden, wenn der Winkel m bestimmt ist, als der Triangel l m n?

4) Durch zwey Seiten und einen nicht spitzigen Winkel, wenn gleich derselbe von jenen Seiten nicht eingeschlossen wird. Es sey — Fig. 24. bestimmt die Seite ab, und der nicht spitzige Winkel b; so sind dem Punkte a nicht zwey Punkte in der Linie bm gleich nahe. Wenn also die Seite ac, die von a aus in die Linie bm reichen soll, gleichfalls bestimmt ist: so kann nichts anders werden, als der Triangel a b c.

5) Durch alle drey Seiten, wenn auch fürs erste kein Winkel bekannt wäre. Es sey — Fig. 25. — bekannt, daß die Linien L, und M, und N, Seiten eines Triangels sind. Man wähle eine Grundlinie, (§. 11.) z. E. L, zwischen den Punkten a und b. Soll nun aus L, und M, und N, ein Triangel werden; so muß ein Punkt c gesucht werden, der von dem Punkte a um die Grösse der Linie M, und von dem Punkte b, um die Grösse der Linie N, entfernt ist. Die Linie M (wenn wir diesen Punkt oberhalb der Grundlinie suchen) kann sich endigen in jedem Punkte des von a aus, mit der Oeffnung des Zirkels, welche = M ist, gemachten Bogens p q. Die Linie N kann sich endigen in jedem Punkte des von b aus mit der Oeffnung N gemachten Bogens r f. Wo also diese Bogen sich schneiden; da kann der gesuchte Punkt c seyn. Aber oberhalb der Grundlinie L können sich die aus a und aus b gemachten Bogen nur einmal schneiden.

Digitized by Google

Also ist der Punkt c bestimmt, wenn man an die Linie L rechts die Linie M, und links die Linie N ansetzt; und in allen solchen Fällen werden einerley Triangel. Ja, die Einerleyheit würde nicht aufgehoben, — Fig. 26. — wenn man an L links M, und rechts N, ansetzte. Man lege nur die Winkel, welche einerley Seiten verbinden, auf einander; so müssen sich die Figuren decken. Suchte man aber den Punkt c unterhalb der Grundlinie L, so werden eben solche Triangel entstehen, als vorher. Man lege den obern Punkt c auf den untern Punkt c; so so werden die Figuren sich decken. **Also kann man die Einerleyheit zweyer Triangel, aus einer jeden von jenen fünf zureichenden Bestimmungsarten erkennen.** Es versteht sich aber von selbst, daß in 2 Triangeln, die einerley sind, weil sie sich decken, **einerley Seite und einerley Winkel gegen einander überstehen, oder einander zugemessen sind.**

§. 19.

In — Fig. 27. — ist der Triangel mno, an der Grundlinie mn gleichschenkelicht. (§. 11.) Man stelle sich vor entweder den Winkel o in zwey Hälften, p und q, oder die Linie mn in zwey Hälften, mr und rn getheilet, und die Zwischenlinie ro von der Spitze bis in die Grundlinie, oder von der Grundlinie bis in die Spitze gezogen. In beyden Fällen sind die beyden kleinern Triangel, pmr und qrn, einerley. Ist p = q; so hat dieser Winkel in beyden einerley Schenkel. Ist der

Punkt

Punkt r in der Mitte der Grundlinie mn; so haben beyde Triangel drey, hier und dort paarweise, gleiche Seiten. Die Triangel sind also (§. 18.) einerley, nämlich so, daß wenn qr auf pr liegt: der Winkel n den Winkel m decket. Folglich ist n = m. Und überhaupt in gleichschenkelichten Triangeln sind die Winkel an beyden Seiten der Grundlinie gleich. Und wenn diese Winkel gleich sind: so sind die Triangel gleichschenkelicht, welches letztere erhellet, wenn man sich in der Mitte der Grundlinie, an der Theilungslinie ro unten rechte Winkel vorstellet. Denn alsdann ist mr gleich rn, und diese Linie in beyden Fällen von einerley Winkeln eingeschlossen. Daher sind die durch Theilung entstandenen Triangel gleich; und des untersuchten Triangels, mno, beyde Schenkel, mo und no, unter sich gleich.

Der gleichseitige Triangel ist, welche Seite man auch zur Grundlinie annimmt, gleichschenkelicht, hat also drey gleiche Winkel, jeden von 60 Grad. (§. 17.) Und wenn man zwey Winkel, jeden von 60 Grad, in einem Triangel entdeckt; so ist er gewiß gleichseitig; weil alsdann der dritte auch 60 Grad hat, und weil folglich der Triangel alsdann gleichschenkelicht auf allen Grundlinien, und daher gleichseitig ist.

§. 20.

In — Fig. 28. — ist an dem Zirkelkraise der Winkel a = b, weil ac und bc Halbmesser

Digitized by Google

sind, (§. 8.) und also der Triangel (§. 19.) gleichschenkelicht ist. Es ist aber der Winkel c, der mit dem Winkel a seine Schenkel auf denselben Bogen mn setzt, an der verlängerten Seite (§. 17.) des Triangels abd; also ist er a + b = 2 a. Oder es ist a = c : 2.

In — Fig. 29. — ist a = f, wegen der gleichen Schenkel. c ist aus oberwähnter Ursache also = 2 a; und aus gleichen Gründen ist d = 2 b. Folglich a + b (das ist, der Winkel am Umkraise) ist = (c + d) : 2, oder die Hälfte des Winkels am Mittelpunkte, welcher seine Schenkel auf denselben Bogen pq setzt.

In — Fig. 30. — ist aus oberwähnten Gründen der Winkel m + n = o; folglich am Mittelpunkt der Winkel c + d = 2 (m + n). Aber weil an den gleichen Schenkeln der Winkel p = n, und weil d an der verlängerten Seite desjenigen Triangels ist, worinn p und n vorkommen; endlich weil daher d = 2 n: so folgt aus dem vorhin erwiesenen Satze (welcher dieser war, c + d = 2 (m + n)) auch der folgende: c = 2 m, oder m = c : 2; das ist, der Winkel an dem Umkraise ist die Hälfte des Winkels am Centro, wenn beyde auf gleichen Bogen stehn.

Es ist also durchgängig ein Winkel am Umkraise die Hälfte desjenigen Winkels am Centro, der mit ihm auf demselben Bogen steht. Der Beweis ist zwar nur von spitzigen Winkeln geführet,

Digitized by Google

führet, aber der Satz ist doch auch von rechten und stumpfen Winkeln an dem Umkraise erweislich. Es stehe — Fig. 31. — der Winkel a + b auf dem halben Umkraise mNo: so ist aus bewiesenen Gründen 2 a = c; und 2 b = d. Folglich 2 (a + b) = c + d. Daher a + b = (c + d) : 2. Und weil c + d zwey rechte Winkel, oder zwey r, ausmacht; so ist a + b, oder **der Winkel am Umkraise, dessen Schenkel auf dem halben Umkraise stehen, so groß als 2 r : 2, oder als r, das ist, als ein rechter Winkel.** Steht der Winkel am Umkraise auf einen Bogen, der grösser ist, als der Halbkrais, wie — Fig. 32. — der Winkel e + f: so weiß man aus dem Vorigen, der Theil f sey ein rechter Winkel, und der Theil e halb so groß, als c am Mittelpunkte. Folglich ist f + e so groß, als c, nebst einem rechten Winkel. Gesetzt nun, der Winkel e + f wäre 120 Grad, nämlich der Winkel f hätte 90 und e hätte 30 Grad: so wäre der Bogen, worauf dieser ganze von dem Umkraise ausgehende Winkel stünde, 180 + 60 Grad. Der Winkel am Centro aber, der auf einem so grossen Bogen ruhete, wäre ein zusammengesetzter Winkel von 180 + 60 Grad, das ist die Summe der Winkel (d + h) + c.

§. 21.

Aus den bisherigen Lehren folgt die Art, Linien und Winkel zu halbiren, und rechtwinkelichte Linien auf einer Linie aufzurichten,

Digitized by Google

ten, oder aus einem Punkte auf eine Linie fallen zu laſſen.

Man ſehe — Fig. 33. — Soll die Linie AB halbirt werden; ſo mache man, vermittelſt der Durchſchnitte von Bogen Bc = Ac, und Bd = Ad. So ſind cdB und cdA gleiche Triangel. (§. 18.) Folglich iſt rB = rA. Soll auf der Linie MN irgend wo eine rechtwinkelichte Linie aufgerichtet werden: ſo wählt man einen beliebigen Punkt c, und auf der Linie MN die Punkte A und B, ſo daß cA = cB. Aus A und B ſucht man einen Punkt d, ſo daß dB = dA. Nun ſind wiederum die vorigen Triangel gleich, folglich bey r gleiche Winkel, folglich eine rechtwinkelichte Linie aufgerichtet. Soll der Winkel c in zwey Hälften getheilt werden; ſo macht man durch Gleichmachung ſeiner Schenkel die Punkte A und B, und ferner dieſelben beyden Triangel, aus deren Gleichheit erhellet, daß e = f. Alle dieſe Zwecke erreicht man auch, wenn man anſtatt der Linien Bd und Ad, an derſelben Seite, wo der Punkt c iſt, in den Punkt g die Linien Ag = Bg zieht. Denn vorausgeſetzt, daß Bc = Ac, und daß Bg = Ag; (welches zu bewirken, man eben ſowohl aus den Punkten A und B, als aus dem Punkte c, den Anfang machen kann,) ſo iſt der Triangel Bgc = Agc; folglich der Winkel e = f. Alsdann iſt (wegen Gleichheit der Triangel, Bfr und Aer,) erſtlich die Seite Br = Ar, folglich iſt AB halbirt, und r auf beyden Seiten ein rechter Winkel; folglich

Digitized by Google

lich rc rechtwinkelicht auf AB hernieder gelassen oder aufgerichtet. Sollte man aber den Winkel c in 2 Hälften theilen; so könnte man aus der Spitze die Punkte A und B, und aus diesen den Punkt g bestimmen, u. s. w.

Soll man aber — Fig. 34. — auf den Endpunkt e einer Linie ae, eine andre rechtwinkelicht stellen; so mache man aus einem gewählten Punkte c, die Linien ce = cb = cd. Alsdann ist de die verlangte Linie. Denn der Winkel dea ist ein rechter, weil er an dem Umkraise des Zirkels, der aus c mit dem Halbmesser ce beschrieben werden kann, steht, und seine Schenkel auf den Halbkrais setzet. (§. 20.) Doch ein besonder Lineal, der Winkelhaken genannt, thut auch gute Dienste, wenn man auf dem Papiere rechtwinkelicht stehende Linien wünscht.

§. 22.

Es steht im Triangel die gröſsre Seite allemal dem gröſsern Winkel gegen über. Es sey — Fig. 35. — der Winkel a > c; so wird er dem c gleich, wenn man d von ihm subtrahirt. Alsdann ist a — d = c, und (§. 19.) ae = ce: folglich cb = ae + eb, welches zusammen (§. 14.) gröſser ist, als ab. Wird aber zweytens vorausgesetzt, daß die Seite cb > ab; so muß der Winkel a seyn gröſser, als c. Denn wäre ihm c gleich: so könnte (§. 19.) cb nicht gröſser seyn, als ab, (oder als der andre Schenkel der Grundlinie ac, welche unter dieser Bedingung 2 gleiche Winkel hätte.)

Digitized by Google

§. 23.

Die Linien ab und cd unter einander — Fig. 36. — ingleichen die Linien bc und ad unter einander, sollen parallel seyn. Alsdann ist jedes Paar innerlicher Winkel, nämlich b und c, c und d, d und a, a und b, von 180 Grad. (§. 16.) Zieht man alsdann die Diagonalen ac und db von Winkel zu Winkel, daß der Winkel a in e und f, daß b in g und h, daß c in i und k, daß d in l und m getheilet wird: so sieht man, daß folgende Eigenschaften eines Parallellogramms, (oder einer in vier geraden Linien, die paarweise parallel sind, eingeschlossenen Fläche) aus einander folgen.

1) Die Linien sind paarweise parallel, und 2) die gegen einander überstehenden Winkel sind gleich; b = d und c = a. Denn wird das Erste vorausgesetzt; so ist b + c = 180, c + d = 180. Also b = d. Ingleichen c + d = 180, und d + a = 180. Also c = a. Wird aber in einem Viereck (wenn der Parallelisme der Seiten anfangs zweifelhaft ist) die Gleichheit dieser Gegenwinkel angetroffen: so sieht man die Gleichheit der Wechselswinkel (folglich §. 16. den untersuchten Parallelisme) auf folgende Art. Es ist f + i = c + k, weil in den Triangeln, deren gemeinschaftliche Grundlinie fi oder ek ist, nach unserer Voraussetzung der Winkel d = b ist, und weil 180 Grad Winkelgrösse (§. 17.) in jedem Triangel seyn muß.

Also

Also	$f + i = e + k$.
Auch ist vorausgesetzt	$e + f = i + k$
Also addirt	$2f + e + i = 2k + e + i$
Folglich	$f = k$. (die Wechselswinkel.)

3) Sind die Linien paarweise parallel, so sind die Linien, die unter sich parallel sind, auch gleich; oder so ist ab = de, und bc = ad. Denn die Triangel, deren Grundlinie fi oder ek ist, sind (weil b = d, und weil f = k, und weil folglich e = i) mit einander einerley, folglich ab = de, und bc = ad: Setzt man aber die Gleichheit dieser zwey und zwey Seiten voraus; so erhellet abermals die Einerleyheit eben derselben Triangel; folglich die Gleichheit der Wechselswinkel; folglich der Parallelisme dieser Seiten. Doch wenn die Rede ist von dem Parallelisme der Seiten bc und ad; so muß man auf eben diese Art diejenigen Triangel betrachten, welche durch die Diagonale db gemacht werden.

Wenn in einem Parallelogramm ein einziger Winkel ein rechter ist; so sind sie es alle vier. Z. E. es sey a — Fig. 37. — ein rechter Winkel: so ist der zweyte innerliche Winkel c, der mit a 180 Grad halten muß, auch ein rechter Winkel. Aus eben demselben Grunde ist wegen c auch d, und wegen d auch b ein rechter Winkel. Folglich, wenn einer unter den Winkeln schief ist, so sind sie es alle.

Digitized by Google

§. 24.

Das Rechteck (oder das Parallelogramm mit rechten Winkeln) heißt ein Quadrat, wenn die Seiten allesammt gleich sind, wie — Fig. 38. Sind sie aber nur paarweise gleich, wie — Fig. 37; so heißt es ein länglich Rechteck. Das Parallelogramm mit schiefen Winkeln, wenn die Seiten allesammt gleich sind, wie — Fig. 39. — heißt eine Raute. Sind die Seiten aber nur paarweise gleich; so heißt es ein Rhomboid, wie — Fig. 40. In den schiefwinkelichten Parallelogrammen muß jede Seite an dem einem Punkte einen spitzigen, an dem andern einen stumpfen Winkel haben, die nämlich zusammen (§. 23.) 180 Grad halten.

§. 25.

Ein jedes Parallelogramm kann, weil sich (§. 23.) zwey Diagonalen ziehen lassen, wie in — Fig. 36. —, auf doppelte Art, als aus zwey Triangeln bestehend, angesehen werden; nämlich erstlich aus den Triangeln a b c und a d c; und zweytens aus den Triangeln a d b und b c d. Diese Triangel sind paarweise einerley, (§. 23.); folglich enthält ein jeder die Hälfte der Fläche des Parallelogramms; und an Flächengröße ist ein jeder dieser vier Triangel dem andern gleich.

Man wähle — Fig. 41. — irgend eine Seite des Triangels zur Grundlinie, z. E. die Seite m n, und ziehe mit ihr parallel, aus der Spitze des, dieser Seite

Digitized by Google

Seite gegenüberstehenden, Winkels o, eine Linie op. Macht man diese Linie op = mn; so ist mnpo ein Parallelogramm. Denn der Winkel q = r, (als Wechselswinkel vorausgesetzter Parallellinien); folglich, wegen Gleichheit der Triangel rnp und qom, ist die Grundlinie np = mo, und der Winkel p = m; ferner folgt alsdann, daß auch die Triangel snp und tmo gleich sind; folglich der Winkel s = t, oder, welches einerley ist, der Winkel m — u = p — v, (das ist, = t). Da nun nach dem Vorigen p = m; so ist p — u = p — v; oder p + v = p + u; oder v = u. Da nun diese Winkel Wechselswinkel sind; so sind auch np und mo parallel, wenn man die Seite op der mit ihr parallelen Linie mn gleich gemacht hat. Zieht man hingegen in die Direction od anfangs nach Belieben eine Linie, macht man aber, parallel mit mo, eine Linie in der Direction ne: so wird abermals ein Parallelogramm, wenn man p als den Endpunkt beyder Linien betrachtet, weil (§. 23.) die Linien alsdann paarweise parallel sind.

§. 26.

Es wird vorausgesetzt — Fig. 42. — daß AB und CD parallel, und daß sowohl ACfg, als eCfB ein Parallelogramm ist. Beyde Parallelogrammen (es soll aber das erste, nämlich ACfg (§. 24.) ein Rechteck seyn) haben eine gleiche Grundlinie, nämlich Cf, und auch gleiche Höhen. Denn die Höhe eines Parallelogramms ist, wenn man eine der Seiten zur Grundlinie gewählt hat, die

Digitized by Google

die rechtwinkelicht stehende Zwischenlinie zwischen der Grundlinie und derjenigen (im Nothfalle verlängerten) Seite des Parallelogramms, die mit der Grundlinie parallel ist. Also wenn Cf die gemeinschaftliche Grundlinie beyder Parallelogrammen ist; so ist auch AC oder fg ihre gemeinschaftliche Höhe.

Es ist aber ein jedes Parallelogramm an Flächengrösse gleich einem jeden, das mit ihm einerley Grundlinie und Höhe hat. Denn ein solches Paar können wir uns allezeit in der Stellung denken, worinnen in unserer Figur AgCf und eBCf sind. Diese aber sind am Inhalte gleich, wie ich erweisen werde. Denn es sind gleich die Triangel ACe und gfB, weil AC = gf und Ce = fb, (wegen der Eigenschaften der Parallelogrammen); ferner weil Ag vermittelst der Gleichheit mit Cf auch so groß ist, als eB; ferner weil daher Ae = gB; und folglich die Triangel ACe und gfB drey gleiche Seiten haben. Sie sind also gleich. Folglich, wenn man von beyden das Stück gme subtrahiret; und dem beyderseitigen Reste das Stück mcf zulegt, und auf diese Weise die obgesagten Parallelogrammen daraus macht: so müssen diese Parallelogrammen AgCf und eBCf auch an Flächengrösse gleich seyn.

Und eben daher sind an Flächengrösse zwey Triangel gleich, wenn sie gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben, wie — Fig. 43. der Triangel A und der Triangel B. Denn ihr Doppeltes, (§. 25.) das ist, ihre Parallelogrammen;

Digitized by Google

men, ſind, wie eben jetzund erwieſen iſt, einander gleich, nämlich an Flächengröſſe. Es iſt aber die Höhe des Triangels die rechtſtehende Linie zwiſchen der Grundlinie und zwiſchen der, derſelben parallel gezogenen, Linie durch die Spitze des Triangels. Die Höhe unſerer beyden Triangel iſt m n.

§. 27.

Es ſey — Fig. 44. — der rechtwinkelichte Triangel, durch r bezeichnet; nämlich a iſt der rechte Winkel, folglich die gegen ihn über ſtehende Seite, die ich h nenne, die Hypothenuſe (§. 14.). Aus dieſer Linie h iſt unten ein Quadrat gemacht, (§. 24.) welches ich h^2 nenne. Eben ſo bedeutet g^2 das Quadrat der gröſſeren, und k^2 das Quadrat der kleinern von den beyden übrigen Seiten des rechtwinkelichten Triangels r. Es ſteht q a rechtwinkelicht auf der untern und obern Seite des h^2. Dieſe Linie q a theilet den Raum h^2 in zwey Theile, deren gröſſeren zur Rechten ich T, und deren kleinern ich t nenne. Endlich iſt zu merken, daß von d durch a nach s, und von b durch a nach e, eine einzige gerade Linie geht, weil der Punkt a lauter rechte Winkel hat. Dieſe Bedingungen und Namen ſetze ich nun als bekannt voraus. Denn ich will beweiſen, daß das Quadrat der Hypothenuſe h^2 ſey $= g^2 + k^2$, das iſt, gleich der Summe der Quadrate von den beyden andern Seiten des rechtwinkelichten Triangels. Ich werde nämlich erſtens beweiſen, T ſey g^2; zweytens, t ſey k^2; folglich $T + t$, oder h^2 ſey $g^2 + k^2$.

1)

Digitized by Google

1) $T = g^2$. Dieſes zu beweiſen, wollen wir unſre vorige Figur in — Fig. 45. — noch einmal abzeichnen, aber die Buchſtaben und Benennungen weglaſſen, welche uns in dem Zwiſchenbeweiſe hindern würden, und aus der Vergleichung beyder Figuren leicht wiederholt werden. Man mache die Triangel abc und dbe. Weil Quadrate nur rechte Winkel haben; ſo iſt der Winkel $m = n$. Folglich der Winkel $o + m = o + n$. Folglich haben die beyden Triangel abc, und dbe, bey dem Punkte b gleiche Winkel; der erſte den Winkel $o + n$, der andre aber $o + m$. Sie haben auch einerley Schenkel dieſes Winkels, nämlich eine Seite aus g^2 und eine Seite aus h^2, (denn alle Seiten deſſelben Quadrats ſind gleich). Alſo ſind dieſe Triangel gleich. Aber der Triangel abc iſt gleich dem Triangel pbc, weil bc die Grundlinie beyder, und bp die Höhe beyder iſt, (§. 26.); folglich iſt er gleich (weil pc §. 25. eine Diagonale iſt) der Hälfte des Rechtecks pqcb, oder der Hälfte des T. Aus gleichem Grunde iſt der Triangel dbe gleich dem Triangel abe, (weil in beyden be die Grundlinie und ba die Höhe iſt). Folglich iſt der Triangel dbe gleich der Hälfte des g^2, weil ea eine Diagonale iſt. Nun alſo zur Wiederholung.

Der Triangel $abc = dbe$

$abc = T : 2$

$dbe = g^2 : 2$

$T : 2 = g^2 : 2$. Folglich $T = g^2$.

2)

Digitized by Google

2) ist zu beweisen, es sey $t = k$. Auf vorige Art — Fig. 46. — wird bewiesen:

Der Triangel $vdb = adu$

$vdb = vda = k^2 : 2$

$adu = pdu = t : 2$

Also $k^2 : 2 = t : 2$. Und $t = k^2$.

Nun zum Beweise des ganzen Hauptsatzes: (Man sehe Fig. 44.) $T = g^2$. Und $t = k^2$. Also $T + t$ (oder h^2) $= g^2 + k^2$. Dieß heißt der pythagorische Lehrsatz von Hypothenusen.

§. 28.

Es sey — Fig. 47. — der Triangel abc und der Triangel ade auf derselben (doch der letzte auf der verlängerten) Grundlinie, nämlich auf ac und auf ae gestellt. Es sey der Schenkel cb parallel dem Schenkel ed; so ist (§. 16.) der innerliche Winkel $e = c$, dem von ihm entfernten Aussenwinkel. Man ziehe fg parallel mit bd; so ist der Winkel g aus derselben Ursache, ich sage, g ist $= d = b$. Folglich in den Triangeln feg und acb ist auch der dritte Winkel $f = a$. Nun setze ich voraus, es sey die Seite $ac = fe$. Folglich sind die gesagten Triangel einerley, und ab ist $= fg$; (und wegen des Parallelisme) $= bd$. Endlich bc ist $= ge$; und (wegen des Parallelisme) $= dg$.

Nun

Nun wieder zu unsern ursprünglichen Triangeln acb und aed. Ich nenne sie (bey dieser Untersuchung) conformirt, gleichwie ein jedes Paar Triangel, die erstlich auf einerley (obgleich kürzern und längern) Grundlinie stehen; ferner einen gemeinschaftlichen Winkel an derselben; und endlich, ihm gegen über, parallele Schenkel haben. Ich sage, in conformirten Triangeln ist Proportion unter den beyderseitigen Grundlinien, und den beyderseitigen Parallelschenkeln; und den beyderseitigen andern Schenkeln. Dieses will ich erst beweisen in dem gesetzten Falle, daß die grössere Grundlinie, nämlich ae, das Doppelte der kleinern ac, sey, welches Statt findet, wenn ac = ef ist. Hernach erst will ich den allgemeinen Beweis führen.

Man wiederhole, daß ac = fe; und bc = ge = dg; und ab = fg = bd.

Also ac : fe = bc : ge = ab : fg

Also ac : 2fe = bc : 2ge = ab : 2fg

Daher ist ac : ae = bc : de = ab : ad.

Nun stelle man sich die gleichen Theile der verlängerten Grundlinie vervielfacht vor: so ist klar, daß die kleinen Triangel m, n, u. s. w. allesammt mit jedem der beyden ersten, die wir betrachtet haben, einerley sind. Folglich, wenn wir in der Grundlinie die Linie ac, in den Parallelschenkeln die Linie bc, in dem andern Schenkel die Linie ab, die Einheit; oder 1, nennen: so ist klar, daß die Grundlinie, der

Parallel-

Digitized by Google

Parallelſchenkel, und der andre Schenkel, (nämlich ein jedes von ihnen) von Anfang an und immer gleich viel Einheiten ſeiner Art enthalte. Hat das Eine nur eine, oder 2, oder 3, oder 4 ſeiner Einheiten; ſo hat das Andre und Dritte eben ſo viel von ſeinen Einheiten. Die Einheit der Grundlinie heiſſe g, des Parallelſchenkels aber heiſſe p, und des andern Schenkels ſ. Eine gewiſſe Zahl aber (z. E. 6 oder 10, u. ſ. w.) heiſſe n. So iſt in jedem dieſer conformirten Triangel) allemal in der Grundlinie die Gröſſe ng, in dem Parallelſchenkel aber die Gröſſe np, und in dem andern Schenkel die Gröſſe ns. Dieſe Gröſſen aber verhalten ſich wie g und p und s, oder wie (in dem erſten Triangel) die Seiten ac, bc, ab.

Nun ſtelle man ſich die gleichen Abtheilungen der Grundlinie, nämlich A, B, C, D, u. ſ. w. als unendlich klein vor; folglich die erſten Einheiten g, p und s auch als unendlich klein, oder kurz, (§. 4.) als dg, dp, ds. So wird von den Triangeln, deren Grundlinien ſich wie 1 dg, 2 dg, 3 dg ... ndg, u. ſ. w. verhalten, das noch wahr ſeyn, was wir von den Triangeln, deren Grundlinien 1 g, 2 g, 3 g, ng, waren, erwieſen haben; nämlich daß in einem jeden die Grundlinie, der Parallelſchenkel, und der andre Schenkel ſey ndg, ndp, nds, als welche ſich, wie dg, dp und ds, oder wie die Grundlinie, der Parallelſchenkel und der andre Schenkel, in dem erſten unendlich kleinen Triangel verhalten. Aber wo man auch den letzten Punkt der Grundlinie ſetzen

Digitized by Google

will: so wird die daselbst geendigte Grundlinie eine (obgleich unendliche) Anzahl von dg, oder (§. 4.) ein $\overline{m}$dg enthalten; folglich mit $\overline{m}$dp und $\overline{m}$ds verknüpft seyn. Dieses m aber leidet vielerley Bedeutungen, je nachdem die unendliche Anzahl grösser oder kleiner ist. Wenn wir nun zwey conformirte Triangel (obgleich die Grundlinie nicht in 2 Hälften, sondern anders getheilt ist, wie — Fig. 48. — die Triangel abc und ade) vergleichen, und wenn wir g und G ihre Grundlinien, p und P ihre Parallelschenkel, s und S ihre andern Schenkel nennen; so verhalten sich g und p und s, wie $\overline{m}$dg und $\overline{m}$dp und $\overline{m}$ds; ferner G und P und S, wie $\overline{m}$dg, $\overline{m}$dp, $\overline{m}$ds. Daher

$$g:p = G:P$$
$$g:s = G:S$$
$$p:s = P:S$$

Oder kürzer $g:G = p:P = s:S$.

Folgerung $(G-g):G = (P-p):P = (S-s):S$

Und $(G-g):g = (P-p):p = (S-s):s$.

Dieß sind die Sätze, die ich erweisen wollte. Wenden wir diese letzten 3 Hauptsätze auf — Fig. 48. — und auf ein jedes Paar conformirter Triangel an, und ziehen wir ef mit bd parallel, daß fe die Differenz de — bc werde; so ist

No. 1. $ac:ae = bc:de = ab:ad$

No. 2. $\begin{cases} ce:ae = fe:de = bd:ad \\ ce:ac = fe:bc = bd:ab \end{cases}$

Die

Digitized by Google

Die bewiesenen Sätze sind also: 1) Es sind No. 1. in Proportion, Grundlinie und Grundlinie, Parallelschenkel und Parallelschenkel, der andere Schenkel und der andere Schenkel conformirter Triangel. 2) Folglich auch jede vier Glieder, wenn das erste Paar aus dem grössern, und das andre aus dem kleinern Triangel genommen; und die beyden ersten Glieder, ferner die beyden letzten Glieder beyder Paare gleichbenannt sind. Z. E. P : S = p : s. 3) Die Differenzen gleichbenamter Glieder, und erstlich beyderseits die grössern, oder beyderseits die kleinern verglichnen Glieder. Z. E. (G—g) : G = P—p : P. Oder (G—g) : g = (P—p) : p. Ich habe mich bey dieser Lehre, wegen ihrer Wichtigkeit, verzögert. Man kann hieraus noch mehr Proportionen (Zahlenk. §. 92.) folgern.

§. 29.

Conformirte Triangel (§. 28.) sind durch Nichts, als durch die Grösse der Seiten unterschieden, (§. 3.) folglich einander ähnlich. Es ist aber nur zufällig, daß sie hinter einem und demselben gemeinschaftlichen Winkel auf derselben Grundlinie (so zu reden in einer Triangelform) wirklich conformirt sind. Sie sind ausser dieser Stellung eben so ähnlich, als in derselben. Der Triangel abc, in der vorigen Figur, ist dem grössern Triangel, ade, eben so ähnlich, wenn er, wie — Fig. 49. — neben dem grössern, und umgekehrt liegt. Es

Digitized by Google

können aber alle unter sich ähnliche Triangel conformirt werden, wenn man einen der harmonirenden Winkel auf den andern, und die grössern Schenkel beyder auf einander legt. Denn könnten sie nicht conformirt werden, nachdem dieses geschehen ist; so müßten an den Endpunkten der Schenkel des Winkels nicht harmonirende Winkel seyn; und alsdann wären sie nicht ähnlich. Haben sie aber harmonirende Winkel, so werden auch die von mir sogenannten Parallelschenkel wirklich parallel; und alsdann sind sie conformirt.

Nun müssen freylich ähnliche Triangel erstlich in allen 3 Winkeln harmoniren; in den Winkeln, die ich nennen will, g, p und s: ferner muß jedes Paar der diesen Winkeln gegen überstehenden Seiten, g und p, mit G und P, auch g und s, mit G und S, endlich p und s, mit P und S, in Proportion stehen, weil nämlich dieses folgt aus dem schon (§. 28.) bewiesenen Hauptsatze:

$$g : G = p : P = s : S.$$

Aber wir können die Aehnlichkeit zweyer Triangel schon aus folgenden zureichenden Zeichen schliessen.

1) Aus der Harmonie zweyer und zweyer Winkel. Denn alsdann ist auch der dritte gleich dem dritten; und alsdann ist klar, (§. 48.) daß der kleinere und grössere dieser Triangel (denn von denen zugleich ähnlichen und gleichen ist oben gehandelt) einander conformirt werden können. Denn man

Digitized by Google

man lege (wie — Fig. 49 und 50. —) einen der gleichen Winkel auf den andern, und wende den aufgelegten Triangel recht: so stehn (in beyden Triangeln) dem einen Schenkel dieses gemeinschaftlichen Winkels der eine, dem andern Schenkel der andre Winkel entgegen. Alsdann werden die Triangel für conformirlich, folglich, (weil das nöthige Verhältniß der Seiten alsdann auch schon bestimmt ist,) für ähnlich erkannt.

2) **Aus einem gleichen Winkel, und der Proportion der dortigen und hiesigen Schenkel desselben.** Es heisse der dortige längere Schenkel l, der hiesige L; der dortige kürzere k, der hiesige K; endlich der gleiche Winkel W. Man lege einen W auf den andern, und l auf L, und k auf K. Es ist ja voraus gesetzt, daß l : k L : K. Wollte man nun keine Aehnlichkeit der Triangel zugestehn: so müßte man den Parallelisme der Linien (— Fig. 48. —) durch welche l mit k, und L mit K verknüpft werden, (das ist der von mir sogenannte Parallelschenkel) bezweifeln, welches doch mit der Gleichheit der gesagten Winkel (§. 16.) streitet.

3) **Aus einem gleichen (aber nicht spitzigen) Winkel, und der Proportion zweyer Seiten, davon einer sein Schenkel nicht ist.** Es sey — Fig. 51. — bekannt, das a = a, und daß ab : bc = aB : BC; so ist der dem kleinen Triangel conforme grössere Triangel nicht nur möglich; sondern, weil a nicht spitzig ist, auch der einzige

mögliche, wenn die bestimmte Proportion bleiben soll. Dasselbe wäre wahr, wenn die Proportion ac : bc = aC : BC vorausgesetzt würde.

4) Aus einer doppelten Proportion in den Verhältnissen der dortigen und hiesigen Seiten. Z. E. wenn bekannt wird, daß

ab : ac = aB : aC, und daß

ab : bc = aB : BC,

wobey ab und aB, (weil die Gleichheit der Winkel fürs erste unbekannt seyn soll,) sowohl dort als hier eine mit beyden übrigen Seiten desselben Triangels verglichne Seite bedeutet. Ich will den Satz beweisen. Es folgt aus den zweyen Proportionen auch die dritte, nämlich bc : ac = BC : aC. Diese Triangel können also conformirt werden, wenn man einen der Winkel, deren Schenkel in beyden Triangeln proportional sind, aufeinander legt. Also sind sie ähnlich.

§. 30.

Will man zu dreyen die vierte Proportionallinie finden; so lege man (— Fig. 52. —) die bekannten Linien a und b an einem beliebigen Winkel an einander; die dritte, c, sey die Verlängerung der a; hierauf ziehe man den ersten Parallelschenkel f, zwischen die Endpunkte der Linien a und b; hierauf den zweyten, g, am Ende der Linie c; so ist bestimmt die gesuchte Linie X. (§. 28.) Und wenn die zweyte bekannte der dritten gleich seyn soll; so mache man c = b, und verfahre, wie zuvor.

Will

Will man aber in der Progression a, x, c, (Zahlenkunst §. 96.) a, x, c, die Linie X suchen; welche man die mittelste nennt: so zeigt folgender Lehrsatz das Mittel. Erstlich: Die Linie, die auf dem Durchmesser eines Zirkelkraises rechtwinkelicht steht, und bis an den Krais reicht, ist die mittelste Proportionallinie zwischen den Theilen des Durchmessers, die durch sie bezeichnet sind. Und zweytens: Die Sehne vom Durchmesser an bis an den Endpunkt dieser Mittellinie, ist die proportionale Mittellinie, zwischen demjenigen Theile des Durchmessers, über welchem sie steht, und zwischen dem ganzen Durchmesser. Denn (— Fig. 53. — d sowohl, als e, als auch P, sind rechte Winkel; nämlich der letzte, weil er (§. 20.) vom Umkraise an die Schenkel auf den Halbkrais setzt. Man vergleiche erst die Triangel Pcf und ebf. Es ist P = e, f = f; also c = b. Ferner vergleiche man die Triangel dca und ebf. Es ist d = e, und c = b; also a = f. Folglich sind die Triangel ähnlich. Daher (§. 29.) dc:da = eb:ef, oder dc:eb = eb:ef, welches das Erste war. Ferner in den Triangeln dca und Pcf, ist d = P, c = c; folglich a = f. Daher, wegen Aehnlichkeit der Triangel, ist dc:ca = Pc:cf, oder dc:Pc = Pc:cf; welches das Zweyte war.

§. 32.

Wenn viele Linien, deren Endpunkte an dasselbe Paar Parallellinien stossen, allesammt durch zwischenlaufende Parallel-

Digitized by Google

linien in Theile zerschnitten werden; so verhalten sich zwey durch dieselben Parallellinien abgeschnittenen Theile dieser Ganzen, wie die Ganzen selbst; folglich ist auch Proportion zwischen zwey Paaren solcher Theile. Solche ganze Linien sind: — Fig. 54. — ab, cd, ef, gh, ik, lm.

Der Beweis des obigen Satzes ist folgender: Wären die beyden Linien, oder die beyden Theile derselben, (die verglichen werden,) beyderseits rechtwinkelicht, wie ab und lm und ihre Theile, an denselben Parallellinien, zwischen welchen sie stehen: so würde unser Satz unmittelbar folgen (§. 15.) aus der Natur der Parallellinien, welche eine gleiche Distanz behalten. Darum sind die Theile, die von den Linien ab und lm an dieselben Parallellinien stossen, mit ihren Ganzen, welche gleich sind, und folglich Paarweise unter sich, in Proportion. Wenn aber die Linien, von welchen die Rede ist, nicht beyde rechtwinkelicht zwischen ihren Parallellinien stehen, sondern wenn ihre Lage gegen einander ist, wie die Lage eines andern Paars unter den erwähnten Linien; so gilt folgender Beweis: — Fig. 55. — In einer jeden Linie ab, welche mit ihren Theilen schief zwischen Parallellinien steht, verhält sich jeder Theil zu seinem Ganzen, wie die Entfernung der Parallellinien, zwischen welchen er steht, zu der Entfernung der äussersten Parallellinien, zwischen welchen das Ganze steht; (§. 28. aus der Lehre von conformirten Triangeln,) diese Entfernung aber ist gleich,

Digitized by Google

gleich, wenn ein Theil einer Linie, und ein Theil einer zweyten Linie zwischen denselben Parallellinien steht. Also haben sie ein gleich Verhältniß zu ihren Ganzen. Das Uebrige folgt aus der Zahlenkunst.

Daher theilet man eine Linie nach Proportion, wie eine andere, oder — Fig. 56. — mn wie no, wenn man sie in einem beliebigen Winkel n zusammen setzt, ihre Endpunkte m und o verbindet, und durch die Theilungspunkte der zur Regel dienenden Linie mn, in die Linie on, Linien zieht, welche der Linie mo parallel sind. Alsdann ist mn : on = ma : oA = ab : AB = bc : BC = cn : Cn, u. s. w. das ist, die ganzen Linien sind nach Proportion getheilt.

Eben diese proportionirte Theilung geschicht auch auf eine andre Art. Denn es mögen — Fig. 57. — waf und WAF zwey conformirte Triangel seyn. (§. 28.) So verhalten sich ein jedes, zwischen denselben aus der Spitze gezognen Linien liegendes, Paar Theile, in der Linie af und AF, z. E. die Theile a und A, so auch b und B, eben so zu einander, wie die ganzen Linien af und AF. Dergleichen Theile sind also auch a+b und A+B; ferner d+e+f und D+E+F. Ich will nur bey dem letzten Satze eine Probe des Beweises geben, welcher bey allen einerley ist. Jede aus der Spitze bis an af gezogene Linie, verhält sich zu der bis in AF verlängerten Linie, wie ws : wt, oder (in einem kürzern Ausdrucke) wie l : L. Also

Digitized by Google

l : L = c : C = d : D = e : E = f : F = (d+e+f) : (D+E+F) zu, ſ. w. Hierdurch wird uns alſo eine neue Art bekannt, eine Linie nach Proportion, wie eine andre, zu theilen.

Wenn aber der Zweck iſt — Fig. 58. — eine Linie mn in gleiche Theile, an Anzahl Z, (in unſerm Exempel in drey gleiche Theile) zu theilen; ſo iſt auch folgendes Mittel: Man mache einen beliebigen ſpitzigen Winkel (zwiſchen 60 und 90 Grad) an dem Punkte m, und denſelben auch an dem Punkte n, jenen jenſeits, dieſen dieſſeits der Linie mn; man gebe dieſem Winkel an m einen kleinen Schenkel mp, und an n einen Schenkel no, welcher Z — 1 (hier 2) mal ſo groß iſt, als mp. Nun ziehe man die Punkte p und o zuſammen, durch die Linie po. Dieſe Linie po ſchneidet auf der Linie mn den Theil mc ab, welcher Z mal darinn enthalten iſt. Denn der Winkel m iſt = n gemacht; bey c ſind zwey gleiche Verticalwinkel; alſo iſt auch o = p. Folglich wegen der Aehnlichkeit der Triangel iſt mc : mp = cn : on; folglich auch mc : cn = mp : on = 1 : (Z — 1). Alſo mc : cn = 1 : (Z — 1). Alſo (mc × Z) — mc = cn. Alſo mc × Z = mc + cn = mn. Folglich mc = mn : Z. Das iſt, mc iſt in mn ſo oft enthalten, als Z anzeigt, und als man haben wollte.

IV.

Digitized by Google

IV.

Von dem Zirkelkraise und seinen Beschaffenheiten.

§. 32.

Hier werden vorausgesetzt die ersten Begriffe von Zirkelkrais und Zirkelfläche, von Mittelpunkt und Umfang, von Durchmesser und Halbmesser, von Bogen, Quadrant und Grad, von Sehne, Abschnitt und Ausschnitt, welche schon oben (§. 8.) gegeben sind; ingleichen (§. 20.) von den Winkeln an dem Umkraise. Ingleichen der Inhalt von §. 34.

Wenn ein Winkel, hmf, in verschiedene Theile getheilet wird; —Fig. 59.— so wird durch die Schenkel der kleinern Winkel, durch mh, mi, mk, mf, der ganze Bogen, hf, eben so, das ist, proportionirt getheilet. Ist ik die Hälfte des Bogens hf; so ist der Winkel imk auch die Hälfte des Winkels hmf, u. s. w. Denn das Maaß eines Winkels ist der Zirkelbogen zwischen seinen Schenkeln, oder die Anzahl entweder ganzen oder gebrochenen Grade, die zwischen seinen Schenkeln sind. Man nenne eine unendlich kleine Einheit des Winkels ein dw, und des Bogens ein db: so sind in einem ganzen Winkel so viele dw, als in einem ganzen Bogen db sind; und in jedem Theile desselben Winkels sind auch so viele dw, als db in dem ihm zugehörigen Theile des Bogens. Folglich ist die Theilung beyder proportionirt.

§. 33.

Digitized by Google

§. 33.

Wenn ef eine Sehne eines gewissen Zirkelkraises ist; — Fig. 59. — so theilet die Linie, welche durch den Mittelpunkt m, und rechtwinkelicht durch die Sehne geht, den Winkel a + b, die Sehne ef, und den Bogen egf in zwey Hälften. Und wenn eine Linie auf der Mitte der Sehne rechtwinkelicht steht: so geht sie durch den Mittelpunkt des Kraises. Alles dieses folgt aus der Gleichheit der Triangel mec und mfd, welche sowohl bey der einen als bey der andern Voraussetzung Statt findet, weil me = mf, weil mc = md, weil der Winkel e = f, und weil auch c = d, folglich auch a = b vorausgesetzt wird. Zum Ueberflusse will ich zeigen, daß wenn gr die Sehne ef rechtwinkelicht in zwey Hälften theilet, gr durch den Mittelpunkt des Kraises gehe. Die Linien von dem Mittelpunkte m, wo er auch seyn mag, bis in die Endpunkte der Sehne, das ist, bis in e und in f, weil diese Punkte in dem Zirkelkraise liegen, müssen gleich seyn. Aus der Mitte der Sehne ef ist gewiß eine Linie in den Mittelpunkt des Zirkelkraises, in m hinein, möglich. Aber von allen, aus c oder d, dem Theilungspunkte der Sehne ausgehenden, Linien, kann es keine andre seyn, als die rechtwinkelicht auf ef stehende Linie cr oder dr. Denn wäre es eine andre Linie, so wären die Winkel c und d nicht gleich, folglich auch nicht die Triangel mec und mfd, worinnen, weil me = mf, und mc = md, und ec = fd, doch alle Seiten unter einander paarweise gleich sind.

§. 34.

Digitized by Google

§. 34.

Also, wenn drey Punkte eines Zirkelkraises bekannt sind, weil man zwischen ihnen zwey Sehnen ziehen kann; oder wenn ein Bogen eines Zirkels bekannt ist, weil sich alsdann ausser den Endpunkten des Bogens ein dritter in der Mitte wählen läßt: so kann man allezeit den Mittelpunkt des Kraises finden. Man darf nur die zwey Verbindungslinien der drey Punkte als zwey Sehnen ansehn, diese Sehnen halbiren, die Theilungslinien rechtwinkelicht darauf setzen, und dieselben so weit verlängern, bis sie sich schneiden. Der Schneidepunkt ist, (weil eine jede Theilungslinie durch den Mittelpunkt geht, §. 33. und zwey gerade Linien sich nur einmal schneiden können,) gewiß der Mittelpunkt.

Es ist aber gewiß, daß drey Punkte, die nicht alle drey in gerader Linie neben einander liegen, allesammt in dem Umkraise irgend eines, und nur eines einzigen Zirkels sind. Die Punkte mögen seyn — Fig. 60. — a, b, c. So sind die Linien ab und bc durch einen Winkel verbunden; die rechtwinkelicht in ihrer Mitte darauf stehenden Linien, de und fg, müssen sich in irgend einem Punkte, m, schneiden. Der Triangel A ist gleich dem Triangel B, wegen der gleichen Winkel bey f, und wegen der Gleichheit ihrer paarweise verglichenen Schenkel. Also mb = ma. Auch die Triangel C und D sind aus derselben Ursache gleich; folglich ma = mb = mc. Eine jede dieser Linien ist also ein Halbmesser desselben

Digitized by Google

ben Zirkels, in dessen Umkraise die Punkte a, b und c sind. Der Mittelpunkt dieses Kraises ist m. Eines andern Kraises, (der einen andern Mittelpunkt hat,) Sehnen können die Linien ab und bc nicht zugleich seyn; (§. 33.) folglich können auch die Punkte a, b und c in dem Umkraise eines andern Zirkels nicht zusammen liegen.

§. 35.

Von den Proportionen der Linien oder Winkel, die wir durch Hülfe eines Zirkelkraises entdecken, ist schon oben (§. 20.) in Ansehung der am Umkraise stehenden Winkel, und (§. 30.) bey einigen Regeln, Proportionallinien zu finden, etwas gesagt. Ferner

1) **Wenn zwey Sehnen** — Fig. 61. — **wie** bc **und** de, **sich in einem Punkte** a, **innerhalb der Zirkelfläche schneiden; so sind, wenn man beyde Theile der einen Sehne** (denn sie bestehn aus Einheiten, wie die Zahlen,) **durcheinander, und beyde Theile der andern Sehne durcheinander, multiplicirt, die Producte gleich.** Denn der Winkel e = c und b = d, (weil jedes Paar, von dem Umkraise aus, auf einerley Bogen steht) und a = a. Also ab : ae = ad : ac. Also (ab) (ac) = (ae) (ad).

2) **Wenn zwey verlängerte Sehnen sich ausser der Zirkelfläche schneiden,** wie (— Fig. 62. —) in dem Punkte a **die verlängerten Sehnen** cd + da **und** cb + ba; **so sind die Pro-**

Digitized by Google

Producte gleich, wenn jede der beyden Linien durch den Ueberschuß über die Sehne multiplicirt wird. Denn (aus oberwähnter Ursache) ist c = c und a = a. Also b = d. Also ist in den Triangeln aeb und acd diese Proportion: ab : ae = ad : ac. Oder (ab) (ac) = (ad) (ae).

3) Wenn also in dem No. 1. gesagten Falle beyde durch den Schneidepunkt abgesonderten Theile in einer der Sehnen, sich einander gleich sind, das ist, wenn ad = ae; so ist ad oder ae die mittlere Proportionallinie zwischen ab und ac. Denn weil, (laut No. 1.) ab : ae = ad : ac, und weil ae = ad; so ist ab : ae = ae : ac. Also, man halbire eine Sehne durch eine andre, welche sie schneidet; so ist jene Hälfte die mittlere Proportionallinie zwischen den beyden Theilen der sie schneidenden Sehne.

4) Wenn hingegen in dem No. 2. gesagten Falle, die eine Sehne de unendlich klein, oder in Vergleichung mit dem Ueberschusse nichts ist; oder wenn — Fig. 63. — ad den Zirkelkrais nur berührt, und folglich eine Verlängerung einer nur unendlich kleinen Sehne ist, welche de heissen mag, und Nulle ist: alsdann ist dieser Ueberschuß oder diese Verlängerung der unendlich kleinen Sehne, die mittelste Proportionallinie zwischen der andern Sehne und ihrer Verlängerung bis in den Punkt a. (Man vergleiche die Figur mit Figur 62.) Denn weil e

und

Digitized by Google

und d ein und derſelbe Punkt iſt, folglich ae = ad: ſo iſt die No. 2. geſagte Proportion, (welche war ab : ae = ad : ac,) hier verwandelt in folgende: ab : ad = ad : ac.

5) Es ſeyn zwey bekannte Linien, m und n; auch eine bekannte Differenz, nämlich p, zweyer unbekannten Linien, x und y; und ferner noch dieſes vorgeſchrieben, daß folgende Producte gleich, nämlich, daß m × n = x × y ſeyn ſollen. Wie findet man die Linien x und y? Man ſetze (Fig. 64.) die Linie m oder ca, und die Linie n oder ad, in eine einzige, in cd, zuſammen; und man errichte in dem Punkte a eine rechtwinkelicht ſtehende Linie, ab = p. So ſieht man ein 1) daß, wenn die Linie ab ſich an beyden Endpunkten gleich viel verlängert, nämlich von a aus, nach einem Punkte h; von b aus, nach einem Punkte k: daß, ſage ich, alsdann die Linien ha und ak, die verlangte Differenz p, oder ab, haben werden. Aber es ſoll auch ſeyn m × n = x × y; das iſt, es ſoll ſeyn ca × ad = ha × ak. Man ſieht 2) aus dem Lehrſatze No. 1. daß ca + ad und ha + ak, als zwey ſich einander ſchneidende Sehnen eines Zirkelkraiſes, angeſehn werden können. Man ſuche alſo (§. 33.) den Mittelpunkt dieſes Kraiſes. Das iſt, man theile ab in zwey Hälften, durch eine rechtwinkelicht ſtehende Linie. Durch dieſe neue Linie wird die Sehne, die wir noch nicht kennen, auch in zwey Hälften getheilt; dieſe Linie geht alſo, weil ſie rechtwinkelicht ſteht, durch den Mittel-

Digitized by Google

Mittelpunkt. Man theile die Sehne cd auch in zwey Hälften, so wird die rechtwinkelicht stehende Theilungslinie mit der vorigen in dem Punkte g zusammenstoßen. Aus diesem Mittelpunkte g mache man den Umkrais, und ziehe die Sehne, deren Theil ab ist, völlig aus; so hat man ha und ak, oder die Linien x und y, (nach dem Lehrsatze No. 1).

6) Es wird gegeben — Fig. 65. — abermals m und n, und eine Summe, $p = x + y$; und es soll abermals seyn $m \times n = x \times y$. Es sey, wie vorhin, m = ac; und n = ad und p = ab. Man setze ac, als einen Theil, in dem Ganzen ad; man setze ab rechtwinkelicht auf den Punkt a. Man betrachte (nach der No. 2. vorgetragnen Lehre) ad als ac + cd; nämlich cd als eine Sehne, und ac als ihren Ueberschuß: man betrachte ab als zusammengesetzt aus zwey Linien, aus ah = x, (ob man gleich den Punkt h noch nicht kennet,) und aus hb = y. Die Linie hb stelle man sich in zwey Theilen vor, in hk und in kb, aber so, daß kb = ah, (ob man gleich den Punkt k so wenig als h kennet.) Nun stelle man sich ferner die ganze Linie ab als eine, auf beyden Seiten durch gleichen Ueberschuß, nämlich durch ah und durch kb, verlängerte, Sehne vor. Es ist nämlich die Sehne kh. Ob man nun gleich die Punkte h und k noch nicht kennet; so ist doch klar, (§. 33.) daß, wenn man sowohl ab als die Sehne cd durch rechtwinkelicht stehende Linien in zwey Hälften theilt, die Theilungslinien durch ihren

Digitized by Google

Zusammenstoß den Mittelpunkt g desjenigen Kraises zeigen, in welchen die Punkte d und c und k unfehlbar fallen, (wenn die Aufgabe eine mögliche Sache ist.) Man mache nun den Umkrais; so werden die Punkte h und k bekannt; und alsdann ist ak = hb; und zwar ist ah = x, und ak = y; Denn (nach No. 2.) ist ah ⋉ ak = ac ⋉ ad, und die Summe ah + ak, oder x + y ist = ab = p, welches verlangt wurde. Auf solche Weise findet man weit mehr Linien in einem verlangten Verhältnisse durch Hülfe des Zirkelkraises und andrer krummen Linien.

§. 36.

Eine unbegränzte Linie — Fig. 66. — welche, wie ab, rechtwinkelicht auf dem Halbmesser cm eines Zirkelkraises steht, geht in die Zirkelfläche schlechterdings nicht hinein, (§. 13 und 14.) sondern berühret dieselbe nur in einem Punkte, oder an einem unendlich kleinen Theile des Umkraises. Eine jede solche Linie, (denn man kann sich an dem Endpunkte eines jeden Halbmessers eine solche vorstellen,) heißt eine **Tangente** des Kraises.

Ueberhaupt eine **Tangente**, (oder insbesondere an einem vorgeschriebenen Punkte des Kraises, an m,) zu ziehen, darf man nur den Halbmesser mc wissen, um die Tangente ab auf m rechtwinkelicht zu setzen. Ist aber — Fig. 67. — ein von dem Umkraise cd entfernter Punkt b gegeben, durch welchen eine Tangente gezogen werden soll; so ziehe man ba. Es ist aber a der Mittelpunkt

des

Digitized by Google

des vorgeschriebenen Zirkels. Aus der Mitte von ba oder aus e beschreibe man einen neuen Zirkelkrais, der den vorigen in c schneiden, durch den Mittelpunkt a gehen, und den Krais in d wieder schneiden wird. Nun ziehe man aus b die Linien bc und bd. Dieselben sind Tangenten des vorgeschriebenen Kraises, und laufen durch den vorgeschriebenen Punkt b. Denn ac und ad sind Halbmesser des ersten Kraises, und machen mit den aus b gezogenen Linien rechte Winkel, welche am Umkraise des zweyten Zirkels ihre Schenkel auf den Halbkrais ab setzen.

Es sey — Fig. 68. — cd eine Sehne eines Zirkelkraises und cb eine Tangente; so steht der Winkel c am Umkraise mit dem Schenkel, (wenn man einen unendlich kleinen Theil von cb für den einen Schenkel ansieht,) auf dem Bogen ced, und ist gleich einem jeden Winkel, welcher von dem Umkraise desselben Zirkels her, auf demselben oder auf einem gleichen Bogen steht.

§. 37.

1) Man stelle sich eine durch gerade Linien — Fig. 69. — umgränzte Fläche abcd vor, welche aus einem in ihr liegenden Punkt p unfehlbar in Triangel theilbar ist. Die Summe aller ihrer Winkel an Graden ist, wenn die Zahl der Seiten, und folglich auch der Triangel, (deren hier 4 sind,) n heißt, 180 n. (§. 17.) Um p herum aber sind alle Winkel zusammen 360 Grad. (§. 10.)

Digitized by Google

Also betragen die Winkel an dem Umfange, nämlich die Winkel (e + f) + (g + h) + (i + k) + (l + m) oder a + b + c + d, an Graden 180 n — 360.

2) Sind alle Seiten und alle Winkel gleich, wie die Seiten (— Fig. 70. —) ab, bc, cd, de, ef, fa; und die Winkel a, b, c, d, e, f, so heissen sie regelmässige Figuren, oder Vielecke, dergleichen entstehen müssen, wenn man alle 360 Grad Winkelgrösse, welche rund umher um einem Mittelpunkte sind, (§. 10.) in so viele gleiche Winkel vertheilt, als die Figur Seiten haben soll; und wenn man alsdann die Sehnen des aus diesem Mittelpunkte beschriebnen Zirkelkraises zwischen den Schenkeln der Winkel zieht. Denn alsdann werden alle Triangel, deren Spitzen am Mittelpunkte sind, wegen Gleichheit aller Sehnen des Kraises, (oder aller Seiten der Figur,) und wegen Gleichheit aller Halbmesser, welche die Schenkel auf jenen Grundlinien sind, allesammt gleich, und zwar als gleichschenkelichte Triangel. Folglich sind alle Winkel dieser Triangel auch unter sich gleich. Z. E. s = g = h = i = k = l, u. s. w. folglich s + g = h + i = k + l, u. s. w. folglich a = b = c, u. s. w. das ist, alle Winkel des regelmässigen Vielecks sind eben sowohl gleich, als seine Seiten.

3) Man kann auch innerhalb eines jeden regelmässigen Vielecks, den Mittelpunkt eines Zirkelkraises, oder ein P finden, dessen mit dem Halbmesser Pa beschriebener Umkrais

Umkrais auch durch die Spitzen aller andern Winkel des Vielecks geht. Denn das regelmässige Vieleck mag dreyseitig oder tausendseitig seyn; so lassen sich 360 Grad an dem Punkte P in eben so viele gleiche Theile zertheilen. Und die Seite des Vielecks mag so groß oder klein seyn, als man will; so kann man einen Halbmesser, der aus dem Punkte P ausgeht, so groß oder so klein wählen, daß eine Sehne (zwischen zwey, in dem gesagten Winkel verbundenen, Halbmessern) der Seite des betrachteten Vielecks gleich ist.

4) Die Seite des Sechsecks (dergleichen unsre Figur ist) ist dem Halbmesser gleich, durch welchen es beschrieben werden kann. Denn der Spitzwinkel am Mittelpunkte muß 360 : 6, oder 60 Grade haben. Der Triangel des Sechsecks aber muß auch an der Grundlinie, (welche die Seite des Vielecks ist,) gleichschenkelicht seyn, und (§. 19.) gleiche Winkel haben. Ein solcher Triangel hat also 60 Grad an der Spitze, und 60 an jedem Endpunkte der Grundlinie, nämlich (§. 17.) zusammen 180. Also ist ein solcher Triangel (§. 19.) gleichseitig; folglich seine Grundlinie, oder die Seite des Sechsecks, dem Halbmesser gleich.

5) Man kann auch innerhalb eines jeden regelmässigen Vielecks aus dem Mittelpunkte P, mit einem Halbmesser, der nur bis in t, oder bis in die Mitte der Seite des Vielecks, oder der Linie fa, reicht, einen Zirkelkrais beschreiben, welcher die Mitte

einer jeden Seite des Vielecks vorbeystreichet, oder von jeder Seite, als von einer Tangente, (§. 36.) berühret seyn wird. Denn Pt theilet den Triangel Pfa in zwey gleiche Theile, und steht auf af rechtwinkelicht. Dasselbe gilt von allen Triangeln, deren Spitzen an P liegen, und deren Grundlinien die Seiten des Vielecks sind. Also sind alle punktirte Linien von P bis in die Mitte jeder Seite des Vielecks einander gleich, und können Halbmesser desselben Zirkelkraises seyn, in Ansehung welches die Seiten des Vielecks (§. 36.) Tangenten sind, weil sie rechtwinkelicht an diesen Halbmessern stehn.

6) Der Zirkelkrais selbst ist nicht unterschieden, von den verknüpften Seiten eines unendlich vielseitigen regelmäßigen Vielecks. Denn wenn man die Seiten klein und zahlreich genug denkt, so wie sie vermittelst der Theilung der Liniengrösse durch eine unendliche Zahl werden können; so kann man ihren Zusammenhang von einem Zirkelkraise nicht unterscheiden.

Anmerkung. Wer nur mässigen Trieb hat, den Verstand mit geometrischer Erkenntniß zu verbessern und zu bereichern, und nur etwa auf die nächsten Bedürfnisse sieht, kann die schweren Lehren von hier an, bis an das VI. Hauptstück, wenigstens zum ersten mal, vorbeygehn.

§. 38.

Von zweyen spitzigen Winkeln, deren Summe einen rechten Winkel ausmacht, heißt einer des andern Complementwinkel, oder kürzer, sein Com-

Digitized by Google

Complement. Also sind, ein Winkel von 60, und einer von 30 Grad, sich einander ihr Complement. Von zweyen Nebenwinkeln hingegen, deren Summe 180 Grad, oder zwey rechte Winkel ausmacht, heißt einer des andern Supplement.

§. 39.

Wenn — Fig. 71. — der Halbmesser mq des Kraises, durch dessen Bogen qr irgend ein Winkel qmr gemessen werden soll, bestimmt ist; so hat (bey jeder Winkelgrösse) der Endpunkt r des einen Halbmessers mr unter den beyden, zwischen welchen der messende Bogen qr liegt, eine bestimmte Entfernung von dem andern Halbmesser, von mq. Nämlich diese Entfernung ist pr, eine Linie, welche auf dem einen Halbmesser mq rechtwinkelicht stehet, und bis an den Endpunkt r des andern Halbmessers, oder des messenden Bogens reicht. Dieselbe Entfernung oder Linie wird genannt der Sinus, sowohl des gemessenen Winkels als des messenden Bogens. Es sind also auch ad, be, cf, die Sinus der Bogen ag, bg, cg, und der durch sie gemessenen Winkel.

Wenn der Winkel unendlich klein, oder Nulle ist; so ist der Sinus auch unendlich klein, oder Nulle. Mit dem Winkel und mit dem Bogen aber wächst der Sinus, so daß der Sinus des rechten Winkels dem Halbmesser gleich wird.

Digitized by Google

Die beyden Winkel zwischen den Bogen ge und cn sind sich unter einander das Complement. (§. 38.) Betrachtet man den ersten Winkel; so ist sc oder mf der Sinus des Complements. Der Sinus des Complements aber heißt auch der **Cosinus** des zuerst betrachteten Winkels. Wie fm der Cosinus des Winkels zwischen dem Bogen cg ist; so ist sm oder cf der Cosinus des Winkels zwischen dem Bogen cn. **Kurz, der Sinus eines Winkels ist der Cosinus seines Complements.**

Der Cosinus ist kleiner, als der Halbmesser. Der Unterschied heißt der **Quersinus.** Des Winkels qmr Sinus ist rp, der Cosinus pm, der Quersinus pq.

Ein stumpfer Winkel hat, so zu reden, keinen besondern Sinus, Cosinus und Quersinus; aber ihre Stelle vertreten der Sinus, Cosinus und Quersinus seines Nebenwinkels oder Supplements. (§. 38.) Daher sind rp, pm und pq der Sinus, Cosinus und Quersinus, sowohl von dem Winkel, dessen Bogen qr ist, als von dem stumpfen Winkel, welcher durch den Bogen rg gemessen wird. **Kurz, zwey Nebenwinkel haben einerley Sinus, Cosinus und Quersinus.** Der Sinus hat kein besonderes Abzeichen, er mag eines stumpfen oder spitzigen Winkels seyn. Der Sinus zu 20 Grad und zu 160 Grad ist nicht nur einerley Linie, sondern auch beydemal positiv mit dem Pluszeichen. Aber des

stum-

Digitized by Google

ſtumpfen Winkels Coſinus wird negativ, des ſpitzigen Winkels hingegen poſitiv geſchrieben.

Der Sinus nimmt zu, bis der Winkel 90 Grad hält; nimmt aber, wenn der Winkel über 90 Grad wird, nach und nach wieder ab, bis er zuletzt gar verſchwindet, wenn der Winkel von 180 Grad zweyen rechten Winkeln gleich wird.

Der Coſinus eines ſehr kleinen Winkels iſt faſt dem Halbmeſſer gleich; er nimmt ab, wenn der Winkel zunimmt, und wird Nulle, wenn der Winkel ein rechter wird. Wird aber der Winkel ſtumpf, und nach und nach ſtumpfer; ſo nimmt die negative Gröſſe des Coſinus nach und nach zu, bis ſie, wenn der Winkel 180 Grad bekömmt, dem Halbmeſſer gleich wird.

Endlich iſt noch merkwürdig, daß der Sinus eines Winkels oder Bogens iſt die halbe Sehne des doppelten Winkels oder Bogens. Der Winkel A iſt = B. Der Sinus des erſten iſt EF, des andern aber DE. Es iſt DE + FE die Sehne des Bogens DF, der zu dem doppelten Winkel A + B gehört. Es iſt DE = FE (§. 33.) = ½ DF. Von dem Sinus eines ſtumpfen Winkels iſt es gleichfalls wahr. Der Sinus des Winkels zwiſchen den Halbmeſſern mq und mG iſt Gf = ½ Gc. Es iſt aber Gc die Sehne, die zu dem Bogen Gqc, das iſt, zu dem Bogen 2Gq gehört.

Digitized by Google

§. 40.

Jede Tangente eines Zirkelkraiſes ſteht auf irgend einem der Halbmeſſer rechtwinkelicht. (§. 36.) Dieſer Halbmeſſer ſey mq. So viel nun von der in q anfangenden Tangente durch den bis in p verlängerten Halbmeſſer mo abgeſchnitten wird; ſo viel, von der aus q ausgehenden Tangente des Kraiſes, heißt die Tangente des geſagten Winkels und Bogens. Der, die Tangente abſchneidende, verlängerte Durchmeſſer, kurz, die Linie mp heißt die Secante deſſelben Winkels und Bogens. Zu dem Winkel f iſt ab, zu dem Winkel f+g iſt ac die Tangente. Zu dem erſten gehört die Secante mb, zu dem andern die Secante mc.

Des Complements Tangente und Secante heiſſet die Cotangente und Coſecante des andern Complements. Z. E. die Winkel g+f und h, ſind einer des andern Complement. (§. 38.) Da alſo der Winkel h die Tangente ed, und die Secante md hat; ſo ſind eben dieſe Linien die Cotangente und Coſecante des Winkels g+f.

Die Tangente eines ſehr kleinen Winkels iſt ſehr klein, und von dem Sinus, von der Sehne und von dem Bogen faſt nicht unterſchieden. Die Tangente aber wächſt mit dem Winkel. Und, noch ehe der Winkel ein rechter wird, iſt ſie unendlich groß. (§. 4.) Denn des rechten Winkels Tangente, iſt gar nicht unterſchieden von der Tangente des Kraiſes, welche (wenn der rechte Winkel zwi-

ſchen

Digitized by Google

schen dem Anfangspunkt a, und dem Endpunkt e liegt) aus a durch b ohne Aufhören fortgeht.

Die Secante kann niemals kleiner seyn, als der Halbmesser; sie wächst gleichfalls mit dem Winkel, und mit dem Bogen, und mit der Tangente. Zuletzt, wenn der Winkel ein rechter wird, wird die Secante unendlich, (§. 4.) oder, so zu reden, überunendlich, weil die aus a ausgehende Tangente, mit der aus m durch e ausgehenden Secante parallel ist, und sich also beyde nicht schneiden können.

Die Tangente eines Winkels von 45 Grad, ist dem Halbmesser gleich. Denn es sey qp eine solche Tangente, so ist in dem Triangel ipq, i von 45 Grad und p auch, weil q, der rechte Winkel, 90 hält. (§. 17.) Also sind die Schenkel iq und pq gleich. (§. 19.)

Wenn der Winkel stumpf wird; so dienen die Tangente und Secante des Supplements oder des Nebenwinkels, aber mit dem Minuszeichen, anstatt der Tangente und Secante des stumpfen Winkels. Daher sind qp und ip, oder die Tangente und Secante des Winkels i, wenn man sie negativ setzt, auch die Tangente und die Secante des stumpfen Nebenwinkels k + h + g + f.

§. 41.

Der Kürze halber, schreibt man r für Radius, oder Halbmesser, Sin. a für Sinus des Win-

Digitized by Google

Winkels a; so auch, Cos. für Cosinus, Tan. für Tangente, und Cot. für Cotangente. Man sehe — Fig. 73. — Es ist m einerley Winkel, gemessen durch verschiedene Bogen ad und eg, von 2 Zirkelkraisen der verschiedenen Halbmesser, ma oder md, und me oder mg. Nach dem kleinern Halbmesser ist ab, nach dem grössern aber ef, der Sinus desselben Winkels. mb ist der kleinere, mf der grössere Cosinus; bd ist der kleinere, fg ist der grössere Quersinus; dc ist die kleinere, gh die grössere Tangente; mc ist die kleinere, und mh die grössere Secante desselben Winkels m. Aber wie sich verhält Halbmesser zu Halbmesser, so verhalten sich zu einander die grössern und kleinern Sinus, Cosinus, Quersinus, Tangenten und Secanten desselben Winkels. Denn nach der Lehre von conformirten Triangeln (§. 28.) ist md : mg = dc : gh. Das sind die Tangenten. Und ma : ab = me : ef = mb : mf. Das sind die Sinus unter sich, und die Cosinus unter sich. Und md : mg = mc : mh. Das sind die Secanten unter sich. Es ist auch (weil ma : me = mb : mf) dieß Verhältniß wahr: ma : me = ma — mb : me — mf. Das sind die Quersinus unter sich. Und diese Proportionen der durch die Grösse des Winkels und des Durchmessers bestimmten Linien sind bey jedem Winkel, auch bey dem Complement eines Winkels wahr. Also verhalten sich auch, bey Verschiedenheit der Halbmesser, desselben Winkels Cotangenten unter sich, und Cosecanten unter sich,

ſich, wie die Halbmeſſer. Wenn daher der Winkel beſtimmt iſt: ſo iſt das Verhältniß zweyer von den ok geſagten Linien zu einander beſtändig einerley, welche Halbmeſſer man wählen mag, wenn nur die beyden Verhältnißglieder nach einerley Halbmeſſer (derſelbe ſey groß oder klein) betrachtet werden.

§. 42.

Es ſtelle — Fig. 74. — der Winkel w einen jeden Winkel vor:

wb = wc = r wa = Cof. w
ab = Sin. w cd = Tan. w
Und wd = Sec. w.

Nach der Lehre von conformirten Triangeln iſt (§. 28.) folgendes Verhältniß wahr:

Sin. w : Tan. w = Cof. w : r
Cof. w : Cot. w = Sin. w : r

Denn jeder Sin. iſt auch ein Cof. Jeder Tan. iſt auch ein Cot. Daher ſind gleich folgende Produkte:

1) Sin. w . r = Tan. w . Cof. w
2) Cof. w . r = Cot. w . Sin. w
3) r^2 = Tan. w . Cot. w (folgt aus 1 und 2)

Weil nun (Tan. a) . (Cot. a) = r^2 = (Tan. b) . (Cot. b); ſo iſt Tan. a : Tan. b = Cot. b : Cot. a.

V.

Digitized by Google

V.

Von Berechnung der Triangel aus zureichenden Bestimmungen.

§. 43.

Der Sinus des rechten Winkels, welcher der Halbmesser oder r ist, wird als aus 10000000 Theilen bestehend vorgestellt. Man hat durch Hülfe der Zahlenkunst und der Meßkunst ausgemacht, wie viel solcher Theile der Sinus, Tangens und Cotangens eines Winkels von einer Minute, und eines jeden Winkels bis an 90 Grade, enthalte. Daraus hat man Tabellen gemacht, worinnen man zu jeder Winkelgrösse die Grösse des Sinus und der Tangente derselben, (auch wohl der Cotangente und Secante) und zu diesen Grössen die gehörige Winkelgrösse aufschlagen kann. Auch sind den Zahlen, welche die Grösse der Sinus und der Tangenten anzeigen, ihre Logarithmen beygefügt, (man sehe die Zahlenkunst Hauptst. X.) Daher, wenn ich künftig von der Multiplication oder Division der Sinus und Tangenten durch gewisse Zahlen rede, ich allezeit den Gebrauch des Hülfsmittels, durch die Logarithmen die Multiplication in Addition, und die Division in Subtraction zu verwandeln, als bekannt voraussetze. In den meisten Tabellen werden die Zahlen der Cotangenten ausgelassen, weil, wenn wir sie brauchen, sie leicht aus den Zahlen der Tangenten gefunden

Digitized by Google

funden werden. Denn weil $r^2 = \text{Tan. w. Cot. W.}$ (§. 42.); so ist $r^2 : \text{Tan. W} = \text{Cot. W}$; oder so ist $2\,l\,r - l\,(\text{Tan. W}) = l\,\text{Cot. W.}$ In den Segneriſchen kleinen Tafeln (zum Gebrauche bey nicht gar genauen Berechnungen) findet man nur die Tangenten der Winkel bis an 45 Grad, und die Cotangenten der Winkel von 45 bis 90 Grad, weil man die Tangenten gröſſerer Winkel durch dieſe Gleichung finden kann: $r^2 : \text{Cot. W} = \text{Tan. W}$; oder $2\,l\,r - l\,\text{Cot. W} = l\,\text{Tan. W.}$ So findet man auch die Cotangenten der Winkel unter 45 Grad, auf die ſchon oben beſchriebene Art.

Aus dem Sinus jedes Winkels ließ ſich die Tangente leicht finden vermittelſt der Gleichung (§. 42.) $\text{Sin. w}\,r = \text{Cos. w Tan. w}$ oder $(\text{Sin. w}\,r)\ \text{Cos. w} = \text{Tan. w.}$ Denn wußte man den Sinus, ſo war der Coſinus auch bekannt. Man kann nämlich den Sinus und Coſinus eines Winkels, weil ſie (§. 39.) zuſammen 90 Grad halten, als die beyden Seiten, welche auſſer der Hypothenuſe in einem rechtwinkelichten Triangel ſind, anſehen, und den Halbmeſſer r für die Hypothenuſe annehmen, da alsdann die Gleichung (§. 27.) $r^2 = (\text{Sin. w})^2 + (\text{Cos. w})^2$ aus dem Sinus und Halbmeſſer auch den Coſinus, und alsdann (wie oben geſagt iſt) die Tangente bekannt macht.

Ich will alſo nur noch Etwas von der Art ſagen, wie man die Zahl der dazu gehörigen Theile des Halbmeſſers zu jedem Sinus gefunden habe.

1) Der

1) Der Sinus zu 30 Grad ist die Hälfte des Halbmessers, oder 5000000. Denn (§. 37.) die Sehne des Winkels von 60 Grad ist dem Halbmesser gleich; und der Sinus zu 30 Grad ist (§. 39.) die Hälfte dieser Sehne.

2) Ist Sin. W (das ist, irgend eines Winkels) bekannt; so ist Sin. W : 2 die halbe Sehne des Winkels W. Diese Sehne aber läßt sich finden. Nämlich erst sucht man Cos. W aus r und aus Sin. W. Hierauf kennt man den Quersinus, (Sinus Versus) oder Vers. W, als r — Cos. W. Zweytens, die gesuchte Sehne, (Chorde) oder Ch wird alsdann aus der Gleichung gefunden, $(Ch)^2 = (Sin. W)^2 + (Vers. W)^2$. So konnte man aus dem Sinus zu 30 Graden viele andre, zu $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ &c. 30 Graden finden.

3) Aus Sin. w läßt sich auch schließen, wie groß Sin. 2 w sey. Nämlich — Fig. 75. — es sind g und e rechte Winkel; b ist den Triangeln g w b und e d b gemeinschaftlich, also w = d. und die gesagten Triangel sind ähnlich. Folglich b w : w g = b d : d e. Also ist die Linie d e = (w g) b d : b w; oder in andern Worten, Sin. 2 w = (Cos. w 2 Sin. w) : r. Also konnte man immer den Sinus des doppelten Winkels aus dem Sinus des einfachen finden.

4) Ein mittlerer Sinus zwischen 2 gefundnen, deren Differenz klein (etwa nicht über 54 Grad) ist, kann gefunden werden, wenn

wenn man so kleine Bogen als gerade Linien ansieht. Denn alsdann verhält sich die Differenz des größten und kleinsten Bogens, zu der Differenz des mittelsten und kleinsten Bogens; wie die Differenz des größten und kleinsten Sinus, zu der gesuchten Differenz des mittelsten und kleinsten Sinus.

5) Auch läßt sich aus dem grössern Sin. G, und dem kleinern Sin. K, der Sin. ((G—K):2) schliessen. Man sucht die Differenz der bekannten Sinus; ferner die Differenz ihrer Cosinus. Jene heisse D, diese U. Es ist $\sqrt{D^2+U^2}$ die Sehne des Bogens, welcher die Differenz der Bogen ist, wozu die bekannten Sinus gehören. Diese Sehne halbirt, ist Sin. ((G—K):2).

6) Der Sinus des Winkels von 45 Grad ist die halbe Sehne eines Winkels von 90 Grad, oder eines rechten Winkels. Die Sehne aber eines rechten Winkels, oder des Quadranten, ist $\sqrt{2r^2}$. (§. 27.)

7) Auf ähnliche Art kann man noch mehr Sinus zu mehr Winkeln (z. E. von 36 Grad) finden. Kleinere Sinus, als zu Winkeln von einer Minute, fand man aus den vorigen durch Voraussetzung, daß ihre Bogen von geraden linien wenig oder nichts unterschieden sind. Man schloß, wie sich verhält der grössere Bogen zu seinem Sinus, so der kleinere zu dem seinigen.

Digitized by Google

Durch solche Hülfsmittel der Erfindung also haben arbeitsame Freunde der Wissenschaften ihren Nachfolgern die Sinustafeln liefern können.

§. 44.

Ich werde in dieser Lehre von Berechnung der Triangel eine Zeitlang den kleinsten Winkel k, den mittelsten m, den grösten g, den Radius oder ganzen Sinus r, nennen. Eben also heisse die kleinste Seite K, die mittelste M, die grösste G.

In einem rechtwinkelichten Triangel ist — Fig. 76. —

1) G : M = r : Sin. m
2) G : K = r : Sin. k
} bedarf keines Beweises.

3) K : M = Sin. k : Sin. m
4) K : M = Sin. k : Cos. k.
5) K : M = Tan. k : r.
} Das sind Folgerungen, §. 39.

Beweis. Es ist Sin. k = (Tan. k . Cos. k) : r (§. 42.)
Also wird (nach 4) K : M = ((Tan. k . Cos. k) : r) : Cos. k
Oder K : M = Tan. k : r.

Oder mit Worten: In einem rechtwinkelichten Dreyecke verhält sich die Hypothenuse G zu jeder andern Seite L, wie der Radius zu dem Sinus des gegen L überstehenden Winkels; und eine der andern Seiten verhält sich zu der andern, wie der Radius zu der

der Tangente des der letzten Seite angemeßnen (oder gegen überstehenden) Winkels.

Anmerkung. Exempel dieser und einiger folgenden Lehren von Berechnung der Triangel, (wozu die Wissenschaft die Trigonometrie heißt,) sind ohne Anblick der Sinustafeln und ohne mündliche Nachricht nicht verständlich, und kommen in dem praktischen Theile vor.

§. 45.

In jedem Triangel verhalten sich die Seiten zu einander, wie die Sinus ihrer angemeßnen (das ist, gegen überstehenden) Winkel.

1) Man wähle — Fig. 77. — die Grundlinie G, und setze Gg rechtwinkelicht: so ist (§. 44.)

M : Gg = r : Sin. k

K : Gg = r : Sin. m. Folglich (durch Divis.)

M : K = Sin. m : Sin. k.

2) Man wähle — Fig. 78. — die Grundlinie K, und setze ac rechtwinkelicht; so ist (§. 44.)

M : ac = r : Sin. g

G : ac = r : Sin. m. Folglich (durch Divis.)

M : G = Sin. m : Sin. g.

Diesen Beweis kann man von einem jeden Paare der Seiten führen, wenn man jede Seite irgend einmal zur Grundlinie wählt.

Digitized by Google

§. 46.

Nach — Fig. 79. — wenn ſin rechtwinkelicht ſteht, iſt (§. 44.)

$$ef : fg = r : \tan. c$$

$$be (\text{oder } cf) : de = r : \tan. b. \quad \text{Folglich}$$

$$de : fg = \tan. b : \tan. c.$$

Eben ſo erhellet, — Fig. 80. —

$$cg : fg = r : \tan. c$$

$$cg : dg = r : \tan.(b+c) \quad \text{Alſo}$$

$$dg : fg = \tan.(b+c) : \tan. c.$$

§. 47.

Weis man — Fig. 81. — eine Seite mit beyden Winkeln ihrer Endpunkte, folglich auch den dritten Winkel; ſo heiſſe die bekannte Seite B, der entgegenſtehende Winkel aber b, und die unbekannte Seite U, ihr angemeßner Winkel aber u. Man findet U, eine der Seiten, wenn man dividirt durch Sin. b das Product aus Sin. u und aus B. Denn (§. 45.)

$$\text{Sin. } b : \text{Sin. } u = B : U.$$

Eben ſo findet man (aus Sin. b und Sin. c, und aus B) die Seite C. Ich rede aber in jedem Falle auch von logarithmiſcher Multiplication und Diviſion. (§. 43.) welche eine Addition oder Subtraction iſt.

§. 48.

Sind ein rechter Winkel w und beyde Schenkel B und C bekannt; ſo findet man

— Fig.

Digitized by Google

(— Fig. 82. —) tan. c, und folglich c, wenn man durch B dividirt, das Product aus c und aus r. Denn (§. 44.)

$$B : C = r : \text{tan. } c.$$

Nun sind alle drey Winkel bekannt; und man findet die Seite W, wenn man durch Sin. b dividirt das Product aus r und aus B. Denn (§. 45.) Sin. b : r = B : W.

§. 49.

Man betrachte — Fig. 83. — den Halbkreis des Mittelpunkts m, den kleinen Bogen ak, und den grössern Bogen ag, der den kleinern in sich schließt. Des Bogens kg Hälfte ist kh = hg, weil hm rechtwinkelicht durch die Sehne in den Mittelpunkt geht. (§. 33.) Es ist gn rechtwinkelicht auf dem Durchmesser, gleichwie auch iq.

W heisse ich den Winkel, welchen der Bogen ag mißt.

w heisse ich den kleinern Winkel, welchen der Bogen ak mißt.

Es ist der Bogen ghk das Maaß des Winkels W — w; folglich der Bogen kh das Maaß des Winkels ½ (W — w) und der Bogen ha ist das Maaß des Winkels ½ (W — w) + w, oder des Winkels ½ (W + w.)

Es ist ki = ig. (§. 33.) Also kg = 2 ki; und, weil iq und gn parallel, so ist ip = ½ gn.

Es ist aber gn = Sin. W; und weil ko beede Durchmesser parallel; so ist on = Sin. w.

Es ist (§. 46.) ferner Tan. ½ (W — w): Tan. ½ (W + w) = gi: ib = ik: ib = ip: (ip + pq) = ½ go: ((½ go) + on) = ½ (Sin. W — Sin. w): ½ (Sin. W — Sin. w) + Sin. w = ½ (Sin. W — Sin. w): ½ (Sin. W + Sin. w) = Sin. W — Sin. w: Sin. W + Sin. w. Also unmittelbar der Hauptsatz: Tan. ½ (W — w): Tan. ½ (W + w) = (Sin. W — Sin. w): (Sin. W + Sin. w). Oder in Worten: **Die Tangente des halben Unterschiedes zweyer Winkel, verhält sich zu der Tangente der halben Summe, derselben wie der Sinus ihres Unterschiedes zu dem Sinus ihrer Summe.**

Unsre bisherige Bedingung aber war, daß der Winkel ½ (W + w) nicht über einen rechten Winkel, und sein Maaß nicht über einen Quadranten beträgt. Ist ½ (W + w) aber über einen Quadranten: so bleibt doch derselbe Satz wahr, weil der Sinus und die Tangente des grössern Winkels alsdann der kleinere wird; und weil also alsdann der Name Tan. w und Sin. w für den grössern; hingegen der Name Tan. W und Sin. W für den kleinern Winkel gehört.

§. 50.

In einem Triangel, in welchem ein grösserer Winkel g, ein kleinerer k, und die gegenüberstehenden

senden Seiten G und K heissen, ist Sin. g : Sin. k = G : K. Also nach der Proportionalregel ist (Sin. g — Sin. k) : (Sin. g + Sin. k) = (G — K) : (G + K) = (§. 49.) tan. ½(g — k) : tan. ½(g + k). Also ist tan. ½(g — k) = tan. ½(g + k) × (G — K) / (G + K).

Oder, in Worten: Die Tangente des halben Unterschiedes zweyer Winkel wird gefunden, wenn man die Tangente ihrer halben Summe durch den Unterschied der gegenüberstehenden Seiten multiplicirt, und das Product durch die Summe dieser Seiten dividirt.

§. 51.

Wenn zwey Seiten, M und G, und der eingeschlossne Winkel k, bekannt sind: — Fig. 84. —

1) So sucht man die Winkelsumme m + g = 180 — k und die Hälfte dieser Summe ½(m + g).

2) Man sucht die halbe Differenz ½(g — m) (§. 50.) Diese subtrahirt man von der halben Summe, so hat man den kleinern Winkel k. Man addirt sie dazu, so hat man den grössern Winkel g.

3) Alsdann, um die Seite K zu finden, dividirt man durch Sin. g das Product aus Sin. k und aus G; oder man dividirt durch Sin. m das Product aus Sin. k und aus M. (§. 45.)

Digitized by Google

§. 52.

Sind zwey Seiten, — Fig. 84. — nämlich G und K, und ein von ihnen nicht eingeschloßner Winkel bekannt, nämlich g; so findet man im Sinus den Winkel k, (und hernach m) wenn man durch G dividirt, das Product aus K und aus Sin. g; hernach findet man die Seite M (wenn man weiß, ob ihr Winkel spitzig oder stumpf ist) dadurch, daß man dividirt durch Sin. g, das Product aus Sin. m und aus G.

§. 53.

Wenn — Fig. 85. — eines gleichschenkelichten Dreyecks sämmtliche Seiten, G, K, K, bekannt sind: so denkt man das halbe rechtwinkelichte Dreyeck, (§. 44.) und dividirt durch die Seite K das Product aus ½ g und aus r; so hat man Sin. ½ g, folglich den Winkel g, folglich (180 — g) : 2 oder k = k, also alle Winkel.

Sind aber — Fig. 86. — alle drey Seiten, G, M, K, eines andern Triangels bekannt; so geschehe Folgendes:

1) Man subtrahirt die kleinste Seite K, von der mittelsten M; der Rest M — K ist hk.

2) Durch M — K, oder durch hk, multiplicirt man M + K, oder die Linie lk; so kömmt $M^2 - K^2$, (nach Berechnung.)

3) Dieß Product $M^2 - K^2$ oder hk . lk dividirt man durch G = mk oder durch die größte Seite; so kömmt (§. 35. No. 2.) die Linie ik (weil (kh) lk = (ki) mk).

4) Man

Digitized by Google

4) Man subtrahirt von G die Linie ik, oder $(M^2 - K^2) : G$; so hat man die Linie mi.

5) Auf mi, oder auf $G - \frac{(M^2 - K^2)}{G}$ oder auf $\frac{G^2 + K^2 - M^2}{G}$ als der Grundlinie, denkt man einen gleichschenkelichten Triangel im (g — u); ich sage g — u, weil nicht der ganze Winkel g in diesen Triangel kömmt. Alsdann denkt man dieses Triangels Hälfte in einem rechtwinkelichten Triangel, den man ferner betrachtet.

6) Nämlich es ist (aus vorerkannten Gründen) Sin. 90 Grad — m = Sin. $\frac{1}{2}$ (g — u). Und gm : r = $\frac{1}{2}$ mi : Sin. $\frac{1}{2}$ (g — u). Folglich Sin. 90 Grad — m = $\frac{1}{2}$ r (mi) : gm = $\frac{1}{2}$ r $\left(\frac{G^2 + K^2 - M^2}{G}\right) : K = \frac{r\,(G^2 + K^2 - M^2)}{2\,GK}$

So wird der erste Winkel m gefunden.

7) Nun endlich nimmt man den ersten Hauptriangel mit den Seiten G, K, M wieder vor, und dividirt durch M das Product aus G und aus Sin. m; so hat man im Sinus den Winkel g, folglich hernach auch k.

§. 54.

Auf solche Weise berechnet man, durch Hülfe der Sinustafeln, die unbekannten Winkel und Seiten eines Triangels, wenn so viel von ihm bekannt ist, als dazu gehört, alles Uebrige daraus zu schließen. (§. 18 und 29.) Wer den Wahrheiten der Meßkunst nicht nachgedacht hat, kann zwar an dem Nutzen, der zum Theil schwe-

Digitized by Google

ren Regeln der Trigonometrie, oder der Triangelberechnung, zweifeln, indem er sich vorstellt, wenn man die nöthigen Bestimmungen zur Berechnung eines Triangels wisse, so könne man auch einen ihm ähnlichen Triangel durch Hülfe eines verjüngten Maaßstabes zeichnen, und alsdann durch Messung der Winkel und Linien auf dem Papier, und durch die bloße Proportionalrechnung alles Unbekannte des gesuchten Triangels finden. Aber die Hand, die Augen und das Werkzeug, sind viel zu unsicher, um mit Zuverlässigkeit vollkommen gleiche Winkel und proportionirte Seiten, oder mit einem Worte, vollkommen ähnliche Triangel anzulegen. Und die kleinste Differenz hat eine erstaunlich große Wirkung, wenn die Seiten der gesuchten Triangel groß sind, welches in der Astronomie beständig Statt findet. Ich schweige von mancherley anderm Nutzen der Trigonometrie, welcher sich bey der Anwendung zeigen wird.

VI.

Von der Lage ebener Flächen.

§. 55.

Zwey oder drey Punkte liegen allezeit in einerley ebenen Fläche, das ist, man kann sich allezeit eine Fläche denken, auf welcher Linien sind, zu denen jene zwey oder drey Punkte gehören; welche Lage die Punkte auch gegen einander haben mögen.

Man

Digitized by Google

Man ſtelle ſich eine gerade Linie vor, welche aus einer Ebene hervorragt, wie ein Stab aus der Fläche des Waſſers. Eine ſolche Linie ſteht rechtwinkelicht auf der Fläche, wenn ſie mit jeder Linie, welche aus ihrem Grundpunkte g; — Fig. 87. — auf die Fläche gezogen werden kann, lauter rechte Winkel macht. Aber dieſe rechtwinkelichte Lage iſt ſchon beſtimmt, ſobald zwey Linien (auf der Fläche) ag und bg, die in g ſich einander ſchneiden oder zuſammenſtoſſen, mit dem Stabe sg rechte Winkel machen. Man verlängere ag bis in c, und bg bis in d, ſo daß alle vier, nämlich gb, ga, gd, gc allesammt unter ſich gleich ſind. Alsdann ſind auch gleich die, den Verticalwinkeln bey g, gegenüberſtehenden Seiten, z. E. eb = da. Nach unſerer Vorausſetzung machen bg, ag, gd, gc mit dem Stabe lauter rechte Winkel. Alſo ſind, wegen Gleichheit der Triangel, die Linien von der Spitze des Stabes, bis in die Endpunkte jener Linien, nämlich die Linien sa, sb, sc, sd, allesammt gleich. Folglich ſind gleich die Triangel scb und sda, und die Winkel derſelben bey c und bey a. Man ziehe in einer beliebigen Entfernung von c, aus cb die Linie mn; ſo erkennt man, (weil die Verticalwinkel, und auch die Winkel bey c und a auf der Grundfläche, nebſt den Seiten gc und ga gleich ſind,) man erkennt, ſage ich, ng und mg als gleich. Daher ſind auch gleich die Triangel cms und ans; folglich iſt die Seite sm = sn. Alſo iſt auch der Triangel smg = sng; alſo ſind

auch

auch in derselben bey g rechte Winkel. Und diesen durch Modelle besser erklärbaren Beweis kann man von jedem Paar der Linien führen, welche durch den Punkt g gehen, und durch zwey Theile getheilt werden. Es ist aber aus dem Punkte g, der Grundfläche, und aus dem Punkte s aus der Höhe, nur die einzige Linie gs oder sg möglich, welche auf der Fläche rechtwinkelicht stehen soll. Denn ist sg rechtwinkelicht, so macht sg mit einigen Linien, die aus g auf der Fläche gehen, solche Winkel, die theils grösser theils kleiner, als ein rechter sind. Und eben dieses ist wahr von der Linie sp.

§. 56.

Alle auf derselben Ebene rechtwinkelicht stehende Linien sind unter sich parallel. Denn zwischen den Grundpunkten dieser Linien sind von zweyen und zweyen gerade Linien auf der Ebene, die an beyden Linien rechtwinkelicht stehen, (§. 15.). Und wenn auf einer bestimmten Ebene E von vielen Parallellinien eine rechtwinkelicht steht; so schließt man, daß sie alle auf E rechtwinkelicht stehen. Denn wenn eine Zwischenlinie, welche zwey andre Linien schneidet, auf der einen rechtwinkelicht, auf der andern aber schief stehet, so sind die geschnittenen Linien (§. 15.) nicht parallel.

Hieraus folget, daß, wenn von zwey Linien, (von denen man nicht weiß, ob sie in derselben Ebene liegen,) eine jede mit einer und derselben dritten

ten parallel ist, auch die beyden ersten Linien unter sich parallel sind. Es sey — Fig. 88. die mit Aa, auch mit Bb parallel; so kann man eine Ebene denken, worauf sie allesammt stehen; und zwar Cc und Aa rechtwinkelicht; folglich auch die Linie Bb (weil sie mit Cc parallel ist) rechtwinkelicht. Daher sind auch Aa und Bb unter sich parallel.

Ein geradlinichter Winkel, — Fig. 88. — dessen Schenkel AB und BC, den Schenkeln eines andern Winkels, AB und AC, paarweise parallel liegen, ist diesem andern Winkel gleich. Man ziehe eine Verbindungslinie Cc zwischen ihren Spitzen, ingleichen ab und Aa, und AB und Bb, so daß eb = CB, und daß ac = CA; so sind ac AC und cb CB Parallelogrammen, (§. 23.). Folglich ist aA mit bB (wegen des gemeinschaftlichen Parallelismi mit cC) unter einander parallel und gleich; folglich ist auch abBA ein Parallelogramm, und ab = AB; daher ist (wegen Gleichheit der Triangel) der Winkel ACB = acb.

§. 57.

Mit einer Linie cd heißt eine Ebene parallel, — Fig. 89. — wenn auf beyden eine Zwischenlinie Rr rechtwinkelicht stehen kann. In diesem Falle läßt sich auf der Ebene allezeit eine Linie ef denken, welche (weil bey r und R lauter rechte Winkel sind,) mit cd parallel ist, und mit ihr in einer und derselben gleich hoch bleibenden Ebene lieget, deren Höhe die Linie Rr vorstellet.

§. 58.

§. 58.

Wenn zwey Ebenen, die nicht Theile einer einzigen sind, so liegen, daß sie eine einzige gemeinschaftliche gerade Linie haben, wie zwey Wände, die in einem Winkel zusammen stoßen: so sagt man, daß die Ebenen sich schneiden; und die gemeinschaftliche gerade Linie heißt ihr Durchschnitt, wie die Linie von dem Fußboden nach der Decke, die den beyden an einander stossenden oder sich schneidenden Wänden gemeinschaftlich ist. Die beyden Ebenen — Fig. 90. — mögen A und B, und ihr Durchschnitt mag dd heissen. Man ziehe aus gewissen Punkten a und b, u. s. w. rechtwinkelichte auf dd in der Fläche A die Linien ae und bc; und abermals rechtwinkelicht auf dd in der Ebene B die Linien am, bn. So sind parallel alle diese Linien, die auf der Ebene A stehen, unter einander; auch unter einander die Linien, die auf der Ebene B stehen. Folglich sind die Winkel an den Punkten a und b, deren Schenkel in beyde Ebenen hinein gehen, (§. 57.) allesammt gleich. Ein jeder dieser Winkel heißt die Neigung der beyden Ebenen A und B gegen einander; oder kurz, ihr Flächenwinkel.

So wie der Flächenwinkel entweder ein rechter oder ein schiefer ist; so sagt man auch, daß die Ebenen entweder rechtwinkelicht oder schief auf einander stehn.

Wenn man die Ebenen als unterbrochen oder als durchdringlich ansieht, so kann eine durch die andere

andere hingehen, wie zwey Scheerwände, die sich einander durchkreuzen, oder — Fig. 91. — wie die beyden auf der Grundebene stehenden Ebenen, welche sich einander in dem Durchschnitte gh gänzlich durchschneiden. Wenn nun beyde, wie in unserer Figur, auf der Grundebene rechtwinkelicht stehen; so steht der Durchschnitt beyder, die Linie gh, gleichfalls rechtwinkelicht auf derselben. Denn sie geht rechtwinkelicht hervor aus beyden Linien derer Durchschnitte, wodurch die beyden Ebenen mit der Grundebene verbunden werden, aus oh und hf, und muß daher auf der Grundebene, (weil beyde Ebenen rechtwinkelicht darauf stehen,) gleichfalls rechtwinkelicht seyn.

§. 59.

Zwey ebene Flächen sind mit einander parallel, wenn sie auch durch die größte Erweiterung beyde sich nirgends nähern, vielweniger zusammenfallen würden. Solche Parallel-Ebenen sind in gemeinen Gebäuden die gegeneinander überstehenden Wände, auch die Fußböden und die Decken der Zimmer. Man kann aber den Parallelisme zweyer Flächen schon schliessen, wenn man nur weiß, — Fig. 92. — daß sie durch eine, auf beyden rechtwinkelicht stehende, Zwischenlinie aa verbunden werden können. Denn alsdann sieht man ein, daß eine jede auf der obern Ebene, aus dem Punkte a ausgehende Linie mit irgend einer, auf der untern Ebene aus ihrem Punkte a ausgehenden, Linie parallel ist. Diese Linien aber breiten sich über beyde

Ebenen

Ebenen so aus, daß ein jeder Punkt in der untern Ebene und der ihm nächste Punkt in der obern Ebene allemal aus zweyen mit einander parallelen Linien sind.

Wenn auf einer Ebene ein Winkel lieget, wie auf der obern Ebene der Winkel a zwischen den Schenkeln h und l; und wenn auf der andern Ebene ein Winkel liegt, der jenem Winkel parallel ist, wie der Winkel a, so läßt sich auch daraus der Parallelisme beyder Ebenen schliessen. Man denke sich nämlich aus der Spitze des Winkels a, der auf der untern Ebene ist, eine rechtwinkelicht daraufstehende Linie aa bis in den Punkt a der obern Ebene. Von diesem Puncte a aus in der obern Ebene ziehe man Parallellinien mit den Schenkeln eines Winkels, welche sind ha und ca, man ziehe nämlich die Linien ab und ac auf der obern Ebene; so wird vermöge der Lehre von Parallellinien (§. 16.) dieser Winkel gleich seyn dem Winkel cab. Also ist der Winkel bac auf der obern Ebene auch dem Winkel bac auf der untern Ebene gleich, und (§. 56.) sowohl ab mit ab, als ac mit ac parallel. Hieraus folgt aber, daß die Zwischenlinie aa auch auf der obern Ebene rechtwinkelicht steht. Denn auf der obern Ebene muß sowohl ab als ac, wegen des Parallisme mit ab und mit ac auf der untern Ebene, an der Zwischenlinie aa rechtwinkelicht stehen. Folglich hat diese Zwischenlinie aa eine rechtwinkelichte Lage gegen beyde Ebenen (§. 55.) und daher sind diese Ebenen unter sich parallel.

§. 60.

Digitized by Google

§. 60.

Wenn zwey Linien beyde zwischen einerley Parallel-Ebenen liegen, und durch andere Ebenen, welche mit diesen parallel sind, durchlaufen; so sind die beyden ganzen Linien, und ein dortiger und hiesiger Theil, welche beyde zwischen einerley Parallel-Ebenen liegen, einander proportional, wie zwey Stangen, die von dem Fußboden des obern Stockwerks durch die Fußböden aller Stockwerke durch, bis in den Fußboden des Kellers reichen, wie diese Stangen, sage ich, proportional sind, mit zweyen beyderseitigen Theilen, die durch die Fußböden eben derselben Stockwerke, (als welche Parallelflächen seyn sollen), abgeschnitten werden. Denn (— *Fig.* 93. —) die Linie AC wird in ihre Theile getheilet durch Parallellinien, davon eine jede zu einer besondern Parallel-Ebene gehöret. Eben dieses ist von der Theilung wahr, wodurch die Linie ac getheilet wird. Aber die Reihe der Parallellinien, wodurch die erste Theilung, nämlich an AC, bestimmt wird, und die Reihe derer, wodurch die Theilung an ac bestimmt wird, haben einerley Distanzen, weil beyde Reihen der Parallellinien zu eben derselben Reihe Parallel-Ebenen gehören. Also geschicht die Theilung an den Linien AC und ac, durch die verschiedenen Reihen der Parallellinien, eben so, als wenn sie durch eine einzige Reihe, so von einander abstehender, Parallellinien geschähe. Folglich sind die, zwischen denselben Parallel-Ebenen liegenden Theile zweyer, gleichfalls zwischen einerley Parallel-Ebenen befindlicher, gan-

Digitized by Google

zen Linien, diese Theile, sage ich, sind ihren Ganzen eben sowohl proportional, als wenn (§. 31.) die beyderseitigen Ganzen und Theile zwischen eben denselben so von einander entfernten Parallellinien lägen. Nach dieser Lehre ist also AC : ac = AB : ab = BC : bc. u. s. w.

VII.

Von Grösse und Verhältniß der Flächen.

§. 61.

Man unterscheide verschiedene Arten der Bewegung eines Punkts, welchen man sich hier unter dem Bilde einer unendlich kleinen Fläche vorstellen mag.

Die vorwärtsliche Bewegung ist diejenige, wodurch ein Punkt zu einem andern Punkte, welchen man sich als unendlich entfernt vorstellen mag, den kürzesten Weg geht, und eine gerade Linie beschreibt. Die rückwärtsliche geht zwar durch dieselbe gerade Linie, die man vorwärtslich genannt hat, aber nach einer entgegengesetzten Richtung, vermöge welcher sich der bewegte Punkt von demselben Punkte entfernt, welchem er durch vorwärtsliche Bewegung sich näherte.

Eine jede Bewegung des Punkts, welche von der vorwärtslichen, oder rückwärtslichen, das ist, von der

Digitized by Google

der bisherigen geraden Linie abweicht, heißt seitwärtslich. Man stelle sich die einzelnen seitwärtslichen Bewegungen eines Punktes, so oft, (oder nach Zurücklegung einer so kurzen geraden Linie) abgewechselt vor, daß sie unendlich klein genannt werden dürfen. Wenn solcher Abwechselungen eine auf die andre so folgt, daß keine merkliche gerade Linie in einerley Richtung von dem bewegten Punkte zurückgelegt wird: so ist der Zusammenhang aller kleinen Richtungslinien, wenn man sie allesammt eine einzige nennt, eine krumme Linie. Gnug von Bewegung eines Punkts. So stelle man sich auch verschiedene Bewegungen einer geraden Linie vor; nämlich die vorwärtsliche immer nach einerley Richtungs- oder Bestimmungspunkte; die rückwärtsliche, die der vorwärtslichen entgegen gesetzt ist, und wodurch der vorgängige Punkt der bewegten Linie, der nachfolgende, und der nachfolgende Punkt der vorgängige wird, so daß beyde sich wieder dahin nähern, wovon sie sich vorher entfernten; endlich die seitwärtsliche Bewegung, welche von verschiedener Art ist. Nämlich wenn sich jeder Theil dieser Linie mit gleicher Geschwindigkeit seitwärtslich bewegt; so heißt die Linienbewegung parallel, weil, wenn die Linie während ihrer Bewegung, allezeit Spuren ihres Daseyns zurückließe, alle ihre Spuren, (welche gleichfalls gerade und ihr gleiche Linien sind,) unter sich parallel wären. Denn man denke sich zwey Punkte dieser so einförmig bewegten Linie. Es ist kein Zweifel, daß (§. 23.) durch die Entfer-

Digitized by Google

nung dieſer zweyer Punkte von einander, und durch die zurückgelegten Linien derſelben allezeit ein Parallelogramm beſchrieben werde. Es iſt aber die parallele Bewegung einer Linie entweder rechtwinkelicht oder ſchief, nämlich rechtwinkelicht in dem Falle, wenn die vorige Spur der Linie und die Richtung eines jeden Punkts derſelben einen rechten Winkel einſchließt.

Auſſer allen dieſen Bewegungen der Linie ſind auch noch diejenigen merkwürdig, in welcher nicht jeder Theil oder Punkt derſelben ſich gleich geſchwind bewegt. Solche Bewegungen heiſſen alsdann kraisförmig, wenn jeder Punkt einen Zirkelkrais oder einen Bogen, welcher ein Theil deſſelben iſt, beſchreibt. Es iſt aber die kraisförmige Bewegung einer Linie entweder einſeitig oder zweyſeitig; jenes, wenn der Mittelpunkt einer von den beyden Endpunkten der Linie iſt, wie bey der Bewegung des Halbmeſſers; dieſes aber, wenn der Mittelpunkt ſich zwiſchen den beyden Endpunkten findet; und zwar entweder von beyden in gleicher Entfernung, wie der Mittelpunkt des ganzen Durchmeſſers, oder in ungleicher Entfernung, welche ſeyn würde, wenn man eine Hälfte des Durchmeſſers etwas abkürzte oder verlängerte, und dennoch in der ſo verlängerten oder verkürzten Linie den Mittelpunkt der kraisförmigen Bewegung da, wo er in dem Durchmeſſer war, bleiben lieſſe.

§. 62.

Digitized by Google

§. 62.

Nach Voraussetzung dieser Begriffe bleibt kein Zweifel an der Wahrheit folgender Sätze: 1) Ein Parallelogramm (§. 23.) kann als eingeschlossen angesehen werden, zwischen der ersten und letzten Spur einer geraden Linie, welche sich parallel bewegt hat, und zwischen den Linien, welche ihre beyden Endpunkte beschrieben haben. 2) War nun die parallele Bewegung zugleich rechtwinkelicht; so ward das Parallelogramm (§. 24.) ein Rechteck; und wenn die von den beyden Endpunkten beschriebenen Linien, der bewegten Linie gleich wurden, und nicht weiter gingen; so ward das Rechteck ein Quadrat. 3) War aber die seitwärtsliche und parallele Bewegung der Linien schief; so ward das Parallelogramm ein Schiefeck, (§. 24.) entweder eine Raute oder ein Rhomboide. 4) Eine Linie kann sich während ihrer parallelen Bewegung verkürzen. Wenn nun die Linie durch solche Verkürzungen zuletzt zernichtete, oder einer unendlich kleinen Linie, das ist, einem Punkte gleich wird; und wenn von dem links liegenden Endpunkte a in der ersten Spur der Linie, durch alle links liegende Endpunkte der andern Spuren, und von dem ersten rechtsliegenden Endpunkte der ersten Spur durch alle rechtsliegende Endpunkte der folgenden Spuren, bis in die letzte Spur, welche ein blosser Punkt ist, dort eine einzige und hier eine einzige gerade Linie gedacht oder gezogen werden kann; so schliessen diese beyden Linien und die erste Spur der bewegten und nach und

Digitized by Google

nach verkürzten und endlich verſchwundenen Linie die Fläche eines Triangels ein, deſſen Grundlinie die erſte Spur, deſſen Schenkel dieſe beyden durch die Endpunkte der folgenden Spuren durchgehenden Linien ſind, und deſſen Spitze die Stelle der bis zu einem Punkte verſchwundenen Linie iſt. 5) Durch kraisförmige Bewegung einer Linie endlich wird ein gröſſerer oder kleinerer Theil einer Zirkelfläche in dieſer Bedeutung beſchrieben, daß die Fläche zwiſchen der erſten und letzten Spur der bewegten Linie, zwiſchen dem einen Endpunkte derſelben, welcher der Mittelpunkt war, und zwiſchen der Spur des andern Endpunktes lieget. Wenn nun der Anfangspunkt und der Endpunkt dieſer letzten Spur zuſammenfällt; ſo iſt die eingeſchloſſene Fläche eine Zirkelfläche: wenn aber die geſagte Spur kleiner iſt; ſo iſt auch nur ein Theil, etwa nur ein Quadrant, oder ein Doppelquadrant (das iſt, die Hälfte), oder ein dreyfacher Quadrant, oder irgend ein kleinerer oder gröſſerer Theil der Zirkelfläche, eingeſchloſſen.

§. 23.

Ich nenne einen Flächenmeſſer, eine nach allen Seiten willkührlich begränzte Fläche, auf welcher man ſich eine unendlich zahlreiche Reihe von erſtaunlich nahen Linien, die alleſammt unter ſich parallel ſind, vorſtellen muß. Dieſe auf einander folgenden Linien nenne ich aa, bb, cc, dd, u. ſ. w. oder mm, nn, oo, u. ſ. w.

Wann zwey Flächen auf demſelben Flächenmeſſer — Fig. 94. — zwiſchen demſelben Paare Linien

Linien aa und cc so gestellet sind, daß beyde Flächen diese Linien aa und cc berühren, und über keine hinüberreichen; und wenn alsdann gefunden wird, daß die Theile jeder Parallelzwischenlinien, welche von der ersten und andern Fläche bedeckt werden, paarweise unter einander gleich sind: so kann man auch die Gleichheit dieser verglichenen Flächen nicht läugnen. Man sieht hier wohl den Flächenmesser und die Parallellinien aa, bb, cc, u. s. w. auch die auf jenen rechtwinkelichtstehenden Parallellinien mm, nn, oo. Sie sind so geordnet, daß jedes erscheinende Viereck eine Quadratfläche ward. Stellt man sich nun die mit einander parallelen Linien nur in einer unendlich kleinen Entfernung von einander vor; so kann man aus folgendem Grunde an unserm Hauptsatze nicht zweifeln. Eine jede Fläche ist die Summe ihrer parallelen Streifen. Wird nun die Höhe der Streifen unendlich klein angenommen; so kann man die ganze Fläche als eine Folge von gleich hohen Rechtecken, deren Grundlinien gleich oder ungleich seyn dürfen, ansehen. Sind nun in zweyen Körpern alle Rechtecke zwischen aa und bb, zwischen bb und cc, u. s. w. paarweise gleich; so hat eine dieser Flächen eben so viele Theile, als die andere, und zwar solche Theile, die paarweise einander gleich sind. Also müssen auch die Ganzen gleich seyn.

Gesetzt nun, die verglichenen Flächen hätten gar keine ähnlich scheinende Figur, man stellte sie aber beyde auf den Flächenmesser,

Digitized by Google

und fände, daß sie gleich viele von den gleichen Quadraten bedeckten; so würde auch daraus folgen, daß sie gleich wären. Und wären die Flächen so unregelmässig, daß sie eine Menge von Quadraten nicht genau bedeckten; so würde man doch die unbedeckten Theile einiger Quadrate durch Augenmaaß und Rechnung in eine Summe solcher Quadrate verwandeln; diese zu der Summe der ganz bedeckten Quadrate addiren, und so eine einzige Hauptsumme von den bedeckten kleinen Quadraten machen können. Sind diese Hauptsummen bey Vergleichung zweyer Flächen gleich; so können die Flächen nicht ungleich seyn. Und wie sich verhält die Hauptsumme H zu der Hauptsumme h bey der Vergleichung zweyer Flächen, FL und fl; so verhalten sich die Flächen selbst gegen einander, oder H : h = FL : fl.

§. 64.

Es ist schon bewiesen, (§. 26.) daß Parallelogrammen, wenn die Höhe der Höhe, und die Grundlinie der Grundlinie gleich ist, unter einander gleich sind. Und eben dieses ist auch von Triangeln bewiesen. Da es nun willkührlich ist, was wir Höhe oder Grundlinie nennen wollen; so bleibt A auch dem B gleich, wenn die Grundlinie in A, der Höhe in B; und wenn die Höhe in A der Grundlinie in B gleich ist.

Aus diesem Grunde erhellet, daß alle Triangel von gleicher Höhe, die auf einer Grund-

Digitized by Google

Grundlinie neben einander stehen, zusammen einem einzigen gleichen, der bey gleicher Höhe die Summe ihrer Grundlinien hat. Denn Fig. 95. — vorausgesetzt, daß die Grundlinie mn = no, und daß beyde auf gleiche Art eingetheilt sind; so ist der Triangel A = a; und B = b und C = c; und A + B + C = a + b + c. Diese Summe aber ist, wenn man die ganze Grundlinie no zusammen läßt, ein einziger solcher eben jetzt beschriebner Triangel.

§. 65.

Ein Parallelogramm oder Triangel A, verhält sich zu B, einem andern von gleicher Höhe, wie die Grundlinie des A zur Grundlinie des B; und sind sie von gleicher Grundlinie; so verhalten sie sich, wie die Höhen. Denn 1) wenn die verglichenen Flächen Rechtecke sind; so wird im ersten Falle durch die Grundlinie einer jeden, im andern Falle aber, durch die Höhe einer jeden die Menge gleicher Streifen bestimmt, die in A und die in B sind. 2) Wenn die verglichenen Flächen, andre Parallelogrammen sind; so verhalten sich doch auf die gesagte Art die ihnen (wegen Gleichheit der Grundlinien und Höhen) gleichen Rechtecke, folglich die Parallelogrammen selbst unter einander. 3) Werden Triangel verglichen; so ist, was von dem Verhältnisse der Parallelogrammen, deren Hälften sie sind, bewiesen ist, auch von ihnen wahr.

Daher, wenn man nach vorgeschriebner Proportion eine parallelogrammische Fläche ein-

Digitized by Google

theilen soll; so theile man so die Grundlinie, und ziehe durch die Theilungspunkte Linien, parallel mit der andern Seite des Parallelogramms. Es sollte, Fig. 96, die Theilung in $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{6}$, oder in $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$ und $\frac{1}{6}$ geschehen. So aber verhalten sich A, B, C gegen das Ganze und unter sich, wenn ihre Grundlinien (da gleiche Höhe bleibt) sich so verhalten. Eben dieses ist von Triangeln wahr, wenn man ihre Grundlinie eintheilt, und in die Spitze Linien zieht. — Fig. 97. A ist $\frac{1}{4}$, B ist $\frac{1}{4}$, C ist $\frac{1}{8}$ und D ist $\frac{1}{8}$ des Ganzen, wenn ihre Grundlinien, da die Höhe bleibt, sich so verhalten.

§. 66.

Es sey r ein gewisses Rechteck,	$\dot{r}$ ein ander Rechteck,
g seine Grundlinie,	$\dot{g}$ seine Grundlinie,
h seine Höhe,	$\dot{h}$ seine Höhe.

$\ddot{r}$ sey ein drittes Rechteck, dessen Grundlinie g, wie in dem ersten, und dessen Höhe $\dot{h}$, wie in dem zweyten ist.

Es ist (§. 65.)

$r : \dot{r} = h : \dot{h}$, und $\dot{r} : \ddot{r} = \dot{g} : g$.

Folglich $r = \frac{\ddot{r}h}{\dot{h}}$, und $\dot{r} = \frac{\ddot{r}\dot{g}}{g}$

Daher $r : \dot{r} = \frac{\ddot{r}h}{\dot{h}} : \frac{\ddot{r}\dot{g}}{g} = gh : \dot{g}\dot{h}$

Oder

Digitized by Google

Oder in Worten: **Ein Rechteck (folglich auch ein Parallelogramm überhaupt, oder ein Triangel) A, verhält sich zu B seiner Art, wie die Producte aus der Grundlinie und Höhe in A und in B.**

Man nenne q eine Quadratfläche von bestimmter Seite, (oder Grösse). Zu diesem q hat ein jedes Parallelogramm ein Verhältniß, welches wir das **bestimmte Maaß** eines jeden nennen wollen. Sind die Parallelogrammen a und b; so heissen die Maassen $\frac{a}{q}$ und $\frac{b}{q}$. **Folglich verhalten sich 2 Parallelogrammen, wie ihre bestimmte Maassen.** Und weil ein Triangel ein halbes Parallelogramm ist; so ist das Maaß des Triangels das halbe Maaß des Parallelogramms; und **2 Triangel verhalten sich, wie die halben, folglich wie die ganzen Maassen ihrer Parallelogrammen.**

Wenn man zweyer Triangel oder Parallelogrammen Grundlinien g und $\dot{g}$, so auch ihre Höhen h und $\dot{h}$, durch Zahlen ausdrückt, (welche auch Brüche seyn können,) oder wenn man die Linien für die zu ihnen gehörigen Zahlen, für G und $\dot{G}$, und für H und $\dot{H}$ setzt: so ist die Zahl G das Verhältniß der Linie g zu der Seite derjenigen Quadratfläche, welche das fundamentale Flächenmaaß, oder die Flächeneinheit ist, und q heisset. Eben so muß man die Zahlen H und $\dot{G}$ und $\dot{H}$ verstehn. Die

Seite

Seite von der meſſenden Quadratfläche q, heiſſe s; ſo erkennt man, wenn a und b Parallelogramme oder Triangel ſind, folgende Verhältniſſe für waar:

$$a:b = \frac{a}{q}:\frac{b}{q} = \frac{g}{s} \times \frac{h}{s}:\frac{\dot{g}}{s} \times \frac{\dot{h}}{s} = \frac{gh}{ss} \cdot \frac{\dot{g}\dot{h}}{ss}$$

$= GH : \dot{G}\dot{H}$. Es ſind aber G, H, Ġ, Ḣ, Zahlen.

Zuweilen aber wird das Maaß des a gegeben in einer meſſenden Quadratfläche q, deren Seite s iſt; und das Maaß des b wird gegeben durch q, deren Seite ṡ iſt; z. E. in einem rheinländiſchen Fuß oder Quadratfuß, und im Pariſiſchen. In dem vorhergehenden Falle, wo dieſe Ungleichheit der Fundamentalmaaſſen, oder der Einheiten nicht war, verhielt ſich a zu b, wie $\frac{a}{q}$ zu $\frac{b}{q}$ und wie die Producte der Zahlen GH und $\dot{G}\dot{H}$. Aber in dieſem neuen Falle, bey Ungleichheit der Einheiten, kann das nicht Statt finden. Sondern weil in dem erſten Zahlenproduete GH, ſich jeder Factor auf die Einheit s; in dem zweyten Zahlenproducte $\dot{G}\dot{H}$ aber ſich jeder Factor auf die Einheit ṡ bezieht; ſo müſſen dieſe Factoren erſt ſo verändert werden, daß ſie ſich auf einerley Einheiten beziehn. Es muß, (wie die Zahlenkunſt lehrt,) wenn die Einheit s in beyden Producten ſeyn ſoll, ſowohl Ġ als Ḣ durch das Verhältniß s : ṡ multiplicirt werden. Alsdann erfolgt wieder die Proportion $a:b = GH : \dot{G}\dot{H}$;

$$\left(\frac{Gs}{\dot{s}} \cdot \frac{Hs}{\dot{s}}\right) = \frac{GH}{ss} : \frac{\dot{G}\dot{H}}{\dot{s}\dot{s}}.$$

Oder

Digitized by Google

Oder in Worten: Die Parallelogrammen (und Triangel) verhalten sich, wenn die zum Grunde gelegte Linieneinheit nicht gleich ist, wie die durch das Quadrat ihrer Linieneinheiten, dividirten Producte ihrer Grundlinien und Höhen.

Weiß man die Grössenfläche F, eines Parallelogramms oder Triangels, und entweder seine Grundlinie g oder seine Höhe h; so ist in Parallelogrammen $F = gh$; und in Triangeln $= gh : 2$. Dividirt man nun F durch die bekannte Linie; so muß in Parallelogrammen die ganze, in Triangeln die halbe unbekannte Linie, als Quotient bekannt werden.

§. 67.

Die Sammlung aller Sätze von der Gleichheit der geradlinichten Flächen ist folgende. Es sind gleich 1) die Flächen, die sich einander decken. 2) Die auf dem Flächenmesser eine gleiche Hauptsumme kleiner Quadratflächen einnehmen. (§. 63.) 3) Die für gleich erkannt werden, wenn man ihre Theile versetzt, oder wenn man beyde durch etwas Gleiches vergrössert oder vermindert. 4) Die Parallelogrammen, oder Triangel, deren Höhe und Grundlinie (nach einerley Einheit) gleiche Producte geben, oder die zu einerley Quadratfläche dasselbe Verhältniß haben. 5) Das Quadrat der Hypothenuse, und die Summe der Quadrate der andern Seiten in einem rechtwinkelichten Triangel.

(§. 27.)

Digitized by Google

(§. 27.) 6) Eine jede regelmäſſige geradlinichte Fläche (§. 37.) gleicht einem Triangel, deſſen Grundlinie der ganze Umfang, und deſſen Höhe der Halbmeſſer desjenigen Zirkelkraiſes iſt, der in der regelmäſſigen Figur beſchrieben werden kann. Z. E. — Fig. 70. — So viel Seiten, ſo viel Triangel ſind da, deren Grundlinien alle gleich, und deren Höhe durchgängig der Durchmeſſer iſt. Alſo enthält die Fläche alle dieſe gleichen Triangel, oder einen einzigen, der dieſer Summe (§. 64.) gleich iſt.

§. 68.

Man copiirt eine geradlinichte Fläche, ſo, wie ſie iſt, wenn man ſie in Triangel getheilt denkt, und einen Triangel nach dem andern copiirt, ohne die Zwiſchenlinien zu ziehen, die innerhalb der Figur fallen, und die man, wenn ſie gezogen wären, wieder weglöſchen kann. Man kann es bey Fig. 98. verſuchen.

Man berechnet den Inhalt geradlinichter Flächen, wenn man jeden Triangel A, B, C, u. ſ. w. nach Höhe und Grundlinie beſonders berechnet, (§. 66.) und alles in eine Summe bringt.

Man kann eine ſolche Fläche auch um ein Vorgeſchriebenes vergröſſern oder verkleinern. Man berechne nämlich die verlangte Differenz des Flächenraums, und formire irgend einen Triangel oder ein Parallelogramm, die dieſe Gröſſe haben, und ſich ſchicken, nach der Abſicht zugeſetzt oder abgenommen zu werden.

Daß

Digitized by Google

Daß man Parallelogrammen und Triangel von allerley Art in einander verwandeln könne, ohne die Grösse zu verändern, versteht sich von selbst, weil sich solche Flächen (§. 66.) gleich sind, wenn es ihre Maassen sind, und weil eben dieselbe Flächenmaasse bey Flächen von verschiedener Figur Statt findet. Den Inhalt einer jeden geradlinichten Figur kann man also in andre Form bringen, und besonders in die Form einer Quadratfläche, oder eines andern Parallelogramms oder Triangels, wenn man die zur Umbildung vorgeschriebene Fläche erst berechnet, sich alsdann eine Grundlinie wählt oder vorschreiben läßt, und endlich ausmacht, welche Höhe das Parallelogramm oder der Triangel haben müssen, um jener Fläche gleich zu bleiben.

Bey dieser Verwandlung ist zuweilen die Absicht, eine vieleckige und vielseitige Figur in eine solche zu verwandeln, die weniger Winkel und Seiten hat. Es sey die gegebne Fläche (Fig. 99.) a, b, c, d. Man schneide irgendwo einen Triangel durch eine Diagonale ab. Dieser Diagonale parallel, ziehe man eine Linie aus a; und aus der Spitze d des abgeschnittenen Triangels ziehe man eine Fortsetzung der Seite cd bis an jene Parallellinie; endlich eine Linie von c nach b. Alsdann nehme man der gegebnen Fläche den Triangel a b d, und gebe ihr den Triangel e b d, welche wegen gleicher Höhe und Grundlinie gleich sind. Eine Seite und einen Winkel aber hat man weni-

ger

ger gemacht, weil zwar bey b ein Winkel geblieben, für a der Winkel e geworden, aber der Winkel d weggefallen ist. Durch Fortsetzung solcher Arbeit macht man endlich aus jeder geradlinichten Fläche einen einzigen Triangel.

Oft werden auch die Linien und Winkel derer Flächen, die man entwerfen soll, in Linienmaaß und Winkelmaaß durch Zahlen gegeben. Gleichwie aber ein Triangel schon bestimmt ist, wenn man gleich eine Seite und die daranstehenden Winkel, oder zwey Seiten und ihren eingeschlossenen Winkel verschweigt; so kann eben dieses in der Aufgabe zu dem Entwurfe einer geradelinichten Fläche verschwiegen werden. Es wäre zu der Fläche (Fig. 103.) dennoch die Aufgabe schon vollständig, wenn man gleich die Winkel Q und M und die Seite QM, oder die zwey Seiten MQ und QP mit ihrem eingeschlossenen Winkel Q verschwiege. Denn wenn das Uebrige, nebst den Winkeln M und P gegeben ist; so müssen die in willkührlicher Länge gezogenen Schenkel derselben, dennoch in dem Punkte Q unfehlbar zusammen stossen und die Figur schliessen.

§. 69.

Wenn man — Fig. 100 — einen Schenkel eines Triangels in gleiche Theile theilt, in ab, bc, cd, u. s. w. und aus den Theilungspunkten Parallellinien durch ihn hinzieht; so verhalten sich die Flächen A, B, C, u. s. w. zu einander, wie

1, 3,

Digitized by Google

1, 3, 5, u. s. w. 7, 9, 11 u. s. w. Denn (§. 28.) die parallelen Linien bb, cc, dp verhalten sich, wie 1, 2, 3, u. s. w. Die darauf gebauten Triangel, deren gemeinschaftliche Spitze a ist, haben die Höhen mn, mo, mp, u. s. w. welche sich auch wie 1, 2, 3 verhalten. Der Triangel A, der Triangel A + B, der Triangel A + B + C, verhalten sich also zu einander (§. 66.) wie (bb)(mn) und (cc)(mo) und (dp)(mp), oder wie 1bb × 1mn und 2bb × 2mn und 3bb × 3mn, das ist, nach der Zahlenkunst wie $1^2, 2^2, 3^2$, u. s. w. weil bb = 1 ist. Die Differenzen der Quadrate $0^2, 1^2, 2^2, 3^2$ u. s. w. sind im Verhältnisse, wie 1, 3, 5, u. s. w. So müssen sich auch verhalten die Differenzen dieser Triangel, da die Triangel selbst sich, wie diese Quadrate, verhalten. Die Differenzen aber der Triangel sind die Flächen A, B, C, u. s. w. Also verhalten sich diese zu einander, wie 1, 3, 5, u. s. m.

§. 70.

Es verhalten sich — Fig. 101. — in zwey ähnlichen Triangeln, A und A + B, die man auch als conformirt betrachten kann, (§. 28, 29.) die Schenkel an derselben Seite, wie die Grundlinien, und auch wie die Höhen, und wie die Schenkel an der andern Seite der Grundlinie. Also verhält sich jede harmonische Seite, die in einem Triangel zwischen denselben Winkeln, als die andre in dem andern Triangel, liegt, zu ihrer harmonischen Seite in dem andern Triangel, wie ein jedes andre Paar dieser harmonischen Seiten, und wie die Höhen,

Digitized by Google

wenn man eins dieſer Paare als Grundlinien annimmt. Eine der beyden mit einander harmoniſchen Seiten heiſſe ſ, die andre S, die dortige Höhe h, die hieſige H; ſo verhält ſich (§. 66.) die Fläche

$A : (A+B) = ſh : SH$. Und

$h : H = ſ : S$. Folglich

$Ah : (A+B)H = ſ^2h : S^2H$. Daher

$A : (A+B) = ſ^2 : S^2$.

Oder in Worten: Die Flächen ähnlicher Dreyecke verhalten ſich wie die Quadrate zweyer von ihren harmoniſchen Seiten.

§. 71.

Wenn zwey geradlinichte Figuren (wie ABCDEF und abcdef —Fig. 102— einander ähnlich ſind, (§. 3.) ſo muß in beyden dieſelbe Folge von Winkeln an dem Umfange, nämlich dort A, B, C, D, E, u. ſ. w. und hier a, b, c, d, e, u. ſ. w. jenen gleich ſeyn, und dieſelbe Folge von Verhältniſſen der erſten und zweyten Seiten-Paare, zwiſchen welchen die gleichen Winkel liegen, gefunden werden. Sonſt wären die Figuren an etwas anders, als an Gröſſe unterſchieden, und daher unähnlich. Es muß ſeyn, was die Seiten betrifft,

Sowohl	Alſo auch
$AB : BC = ab : bc$	$AB : ab = BC : bc$
$BC : CD = bc : cd$	$BC : bc = CD : cd$
$CD : DE = cd : de$	$CD : cd = DE : de$.
u. ſ. w.	u. ſ. w.

Folg-

Digitized by Google

Folglich AB : CD = ab : cd
AB : DE = ab : de
Oder AB : ab = CD : cd = DE : de.

Oder in Worten: Wie sich in zwey ähnlich figurirten Flächen verhält ein Paar harmonischer Seiten zu einander; so verhalten sich zu einander alle Paare.

§. 72.

Man theilt 2 ähnlich figurirte geradlinichte Flächen, auf ähnliche Art, in Triangel, wenn in beyden von gleichen Winkeln zu gleichen Winkeln, deren Schenkel hier und dort ein gleiches Verhältniß zu einander haben, Diagonalen gezogen werden, bis beyde Flächen aus lauter Triangeln bestehen. Ein Paar Triangel aus beyden ähnlichen Flächen, — Fig. 102. — wie T und t, U und u, V und v, W und w, nenne ich unter sich harmonisch, wenn ihre 3 Winkel an 3 Punkten stehen, welche in den verglichnen ähnlichen Figuren 3 gleiche Winkel hatten. Z. E. die Winkel von T stehen an den Punkten B, C, D, und die Winkel von t an den Punkten b, c, d. Daher sind diese Triangel harmonisch. Harmonische Triangel aber sind einander ähnlich. Denn in T und t ist ein eingeschloßner Winkel, zwischen Seiten, die ein gleich Verhältniß haben. (§. 29.) Weiß man die Aehnlichkeit zwischen T und t; so schließt man sie auf gleiche Art von U und u, von V und v, von W und w; und von allen.

In zwey harmonischen Triangeln, die in zwey ähnlichen Flächen anzutreffen sind,

ist allezeit, dort und hier, wenigstens eine der Seiten aus beyden gegebenen Figuren. In T und t sind aus den Hauptfiguren dort die Seiten BC und CD, hier die Seiten bc und cd; in U ist AB, in u aber ab, aus den gegebenen Hauptfiguren. Hingegen DB und AD, ingleichen db und ad sind Diagonalen.

Und diese gegebenen Seiten in allen Paaren harmonischer Triangel, sind unter einander harmonisch. (§. 71.) Also haben die gegebenen Seiten aller, in zwey ähnlich figurirten Flächen befindlicher, harmonischer Triangel einerley Verhältniß, in jedem Paare dieser Triangel. Wenn die Grundlinien oder gegebnen Seiten der Triangel in der ersten Fläche heissen GA, GE, GI, GO, GU, und ihre harmonische Grundlinien in der andern Fläche ga, ge, gi, go, gu; so ist GA : ga = GE : ge = GI : gi = GO : go = GU : gu. Folglich auch die Verhältnisse der Quadrate $(GA)^2 : (ga)^2 = (GE)^2 : (ge)^2$ u. s. w. Die harmonischen Triangel mögen TRA, TRE, TRI, TRO, TRU; und in der andern Fläche tra, tre, tri, tro, tru heissen. Es ist TRA dem tre, und TRE dem tre ähnlich, u. s. w. Also (§. 70.)

TRA : tra = $(GA)^2 : (ga)^2$
TRE : tre = $(GE)^2 : (ge)^2 = (GA)^2 : (ga)^2$
TRI : tri = $(GI)^2 : (gi)^2 = (GA)^2 : (ga)^2$
TRO : tro = $(GO)^2 : (go)^2 = (GA)^2 : (ga)^2$
TRU : tru = $(GU)^2 : (gu)^2 = (GA)^2 : (ga)^2$

(SUM : sum) = $(GA)^2 : (ga)^2$

Oder

Digitized by Google

Oder in Worten: die Summe aller Tri angel in einer von 2 ähnlich figurirten gera delinichten Flächen, das ist, die eine Fläche selbst, verhält sich zu der Summe in der andern Fläche, das ist, zu ihr selbst, wie das Quadrat einer dortigen, zu dem Quadrate einer hiesigen, unter einander harmonischen Seite, oder wie das Quadrat des ersten Gliedes zu dem Quadrate des zweyten Gliedes von dem unter den harmonischen Seiten herrschenden Verhältnisse.

Weil nun alle Seiten zweyer ähnlich figurirten Flächen paarweise harmonisch sind, und das Verhältniß in jedem Paare dem Verhältnisse in jedem andern Paare gleich ist; so ist das Verhältniß des ganzen aus allen Seiten bestehenden, Umfangs der einen Fläche, zu dem Umfange der andern Fläche, gleich dem, in jedem Paare harmonischer Seiten, durchgängig herrschenden Verhältnisse.

§. 73.

Wenn man einer Fläche Fla eine andre Fläche Fle ähnlich machen, und die erste durch die andere (verjüngt, das ist,) verkleinert, oder vergrössert vorstellen soll; so muß das herrschende Verhältniß zwischen den harmonischen Seiten in Fla und Fle, oder kürzer, das Verhältniß v (§. 72.) entweder gewählt oder vorgeschrieben seyn. Wenn nun die auf einander folgenden Winkel in Fla sind, a, b, c, d, u. s. w. und die Seiten sa, sb, sc, sd, su,

und so weiter: so mache man, um die Fläche Fle zu entwerfen, aus jenen Seiten die harmonischen Seiten $\frac{fa}{v}, \frac{fe}{v}, \frac{fi}{v}, \frac{fo}{v}, \frac{fu}{v}$, u. s. w. und setze zwischen jedem Paare harmonischer Seiten dieselben Winkel, die zwischen ihren harmonischen Seiten in Fla lagen. So entwirft man, die mit derselben ähnliche Fläche Fle, weil dieselbe Folge von Winkeln, und von Verhältnissen der einschliessenden Seiten (§. 70.) gemacht ist.

Man kann aber auch — Fig. 103. — bey Verjüngung geradelinichter Flächen, auf folgende Weise verfahren. Man wähle in oder ausser der gegebenen Figur F einen Punkt T, und ziehe von dort aus, Linien nach allen Winkelpunkten, nach M, N, O, P, Q. Alsdann messe man die Winkel bey T und ihre Schenkel nach der Ordnung. Eben eine solche Folge von Winkeln, mache man an einem Punkte t auf dem zum Entwurfe bestimmten Papiere, anfangs mit unbestimmt langen Schenkeln. Wenn nun bey der gegebenen Figur F, die Schenkel der Winkel in ihrer Ordnung scha, sche, schi, scho, schu heissen, und das herrschende Verhältniß der harmonischen Seiten, in der gegebenen und verlangten Fläche v ist; so mache man nach der Ordnung auf dem Papiere aus den Spitzen bey t, die Schenkel der Winkel $\frac{scha}{v}, \frac{sche}{v}, \frac{schi}{v}, \frac{scho}{v}, \frac{schu}{v}$. Zwischen den Endpunkten dieser Schenkel, ziehe man gerade Linien,

Digitized by Google

linien, und lösche alsdann die Schenkel weg; so bleibt die Figur der Fläche f stehn, welcher F ähnlich ist. Denn an den Punkten T und t sind die Spitzen von einer Folge von Triangeln, die nicht nur paarweise unter einander ähnlich, sondern auch durchgängig harmonisch sind, (§. 72.). Die Folge der Grundlinien dieser Triangel in der Fläche F ist MN, NO, OP, PQ, QM; in f aber ist sie mn, no, op, pq, qm. Auch sind wegen Aehnlichkeit der, auf diesen harmonischen Grundlinien in F und in f da gewesenen, Triangel, die Winkel in den Punkten M, N, O, P, Q gleich den Winkeln in m, n, o, p, q. Also ist an den Flächen F und f dieselbe Folge von Winkeln und von Verhältnissen der, sie einschliessenden, Seiten. Daher können sie durch nichts, als allenfalls durch die Grösse unterschieden werden, und sind also (§. 3.) einander ähnlich.

§. 74.

Es mögen Fla und Fle zwey Flächen bedeuten, die einander ähnlich sind, wie die beyden Figuren, (Fig. 103.). Es werde eine dritte Fläche Fli gesucht, die ihnen auch ähnlich und beyden zusammen an Grösse gleich seyn soll. Alsdann wähle man, aus jeder gegebenen Figur aus Fla und Fle, irgend ein Paar harmonischer Seiten, (z. E. MQ und mq, oder im kürzern Ausdrucke) S und s. Beyde Seiten setze man rechtwinkelicht zusammen, und ziehe die Hypothenuse. So ist dieselbe die mit s und S harmonirende Seite Y in der Fläche Fli, die man sucht.

Denn Fli : y^2 = Fla : s^2 = Fle : S^2
Fli : y^2 = Fla + Fle : $s^2 + S^2$ } §. 72.
Fli : y^2 = Fli : $s^2 + S^2$ (nach Vorausſetzung)
$Y^2 = s^2 + S^2$

Oder Y iſt (§. 27.) die Hypothenuſe der Seiten s und S.

Geſetzt aber, es werden zwey ähnliche Flächen Fla und Fle gegeben, und die dritte Fli, welche geſucht wird, ſoll die Differenz Fla — Fle ſeyn; ſo wähle man abermals, aus Fla die harmoniſche Seite S, aus Fle die harmoniſche Seite s. Man mache — Fig. 104. — aus S den Durchmeſſer eines Halbkraiſes, und ſetze s als Sehne an einem Endpunkte deſſelben, bis an den Umkrais. Endlich ziehe man Y, oder die andre Sehne, ſo iſt y die harmoniſche Seite in der Fläche Fli, die man ſucht. Denn der Winkel zwiſchen s und Y iſt ein rechter, (§. 29.). Ferner

Fli : Y^2 = Fla : S^2 = Fle : s^2
Fli : Y^2 = Fla : — Fle : S^2 — s^2
Fli : Y^2 = Fli : S^2 — s^2 (nach Vorausſetzung)
$Y^2 = S^2 - s^2$. Alſo Y iſt die geſagte Seite im Triangel, (§. 27.).

Man ſieht leicht, was zu thun ſey, wenn etwa 3 ähnliche geradelinichte Flächen, die an Raum ungleich ſind, in eine einzige, die ihnen auch ähnlich, und allen zuſammen gleich iſt, verwandelt werden ſoll. Sind die kleinen Flächen a, b, c; ſo ſuche man erſt die Seite zu der Fläche a + b.

Hat

Hat man diese; so suche man die Seite zu der Fläche (a + b) + c.

Eben so ist es, wenn etwa 2 oder mehr kleinere ähnliche, aber ungleiche Flächen, nämlich a, b, c, ihrem Inhalte nach zusammen, von der ihnen ähnlichen grössern Fläche d so sollten subtrahiret werden, daß der Rest auch eine eben so figurirte Fläche bliebe. Man suche die Seite zu der Fläche a + b + c. Aus dieser Seite und aus der harmonischen Seite der grossen Fläche d, kann man die Seite der als Rest bleibenden ähnlichen Fläche, auf vorhin gesagte Art finden.

Soll zu einer Fläche Fla eine andre ihr ähnliche Fläche Fle, welche 2, 3, 4, 5, und mehrmal so groß ist, gefunden werden; so findet man die harmonische Seite — Fig. 105. — auf folgende Art. Die Seite der kleinen Fläche sey ab = bc. So ist die Hypothenuse ac die Seite zu 2 Fla. Diese Seite werde auch bd; so ist die Hypothenuse ad auch die Seite zu 3 Fla. Diese Seite werde be; so ist die Hypothenuse ae die Seite zu 4 Fla, u. s. w. und also die Seite zu der Fläche Fle, die man sucht.

§. 75.

Ich setze hier die Grundbegriffe von dem Ausschnitte und Abschnitte einer Zirkelfläche voraus, weil sie oben (§. 8.) gegeben sind.

Digitized by Google

Man denke den Umkrais eines Zirkels in Theile getheilt, die klein genug, das ist, unendlich klein sind; so ist ein solcher Theil, als eine kleine gerade Linie, und der Umkrais anzusehen, als der Zusammenhang aller Seiten eines regelmässigen Vielecks von unendlich vielen Seiten und Winkeln, (§. 37, 61.) oder als ein Zusammenhang von Sehnen (Chorden) sehr kleiner Winkel. Hieraus folgt, 1) daß die Sinus, Sehnen, Tangenten und Bogen unendlich kleiner Winkel zusammen fallen, und daß also (§. 40.) alle Halbmesser an dem Umkraise rechtwinkelicht stehen. 2) Daß alle, als Linien betrachtete, Bogen gleicher Winkel, wenn sie vermittelst verschiedener Halbmesser gezogen sind, zu ihrem Halbmesser ein gleich Verhältniß haben. Denn es folgt unmittelbar, aus der Lehre von conformirten Triangeln (§. 28.), daß jede Sehne eben desselben Winkels, zu ihrem Halbmesser ein gleiches Verhältniß habe. Also ist dieses auch wahr, von den unendlich kleinen Sehnen der unendlich kleinen Bogen, und folglich von derjenigen Summe derselben, in welcher die Liniengrösse oder Länge des, zu einem gewissen Winkel gehörigen, Zirkelbogens besteht. Daraus folgt nun 3) daß ein jeder ganzer Zirkelkrais sich zu seinem Halbmesser, und folglich zu dem doppelten Halbmesser, oder Durchmesser, wie ein andrer Zirkelkrais zu dem seinigen verhalte. Den der Zirkelkrais ist nichts anders, als eine gewisse Anzahl von Bogen unendlich kleiner Winkel.

§. 76.

Digitized by Google

§. 76.

Der Ausschnitt ist gewiß grösser — Fig. 106. — als der Triangel, dessen Grundlinie die Sehne ist. Denn es fällt in die Augen, daß ein Abschnitt übrig bleibt. Ueberdies ist der Ausschnitt, wenn man den Bogen als eine Menge unendlich kleiner Sehnen betrachtet, einem Triangel gleich, dessen Grundlinie die Liniengrösse des Bogens, und dessen Höhe der Halbmesser ist. Hingegen der auf der Sehne gebauete Triangel, hat weder so viel Grundlinie, noch so viel Höhe. Die Differenz des Bogens und der Sehne fehlet an der Grundlinie. Die Differenz (§. 39) des ganzen Halbmessers und des Cosinus des halben Winkels, oder der Querfinus desselben, fehlet an der Höhe.

Hingegen der Triangel, dessen Grundlinie die Doppel-Tangente des halben Winkels w ist, hat mehr Flächengrösse, als der Ausschnitt. Da nun seine Höhe der Höhe des Ausschnitts gleich ist; so muß seine Grundlinie grösser seyn, als die Liniengrösse des Bogens.

Also fällt die Liniengrösse des, zu einem jeden Winkel gehörigen, Bogens zwischen seine Sehne, als welche kleiner ist; und zwischen die Doppel-Tangente des halben Bogens, als welche grösser ist.

§. 77.

Man stelle sich — Fig. 106 — den Winkel w + w erstaunlich klein vor; so wird die Sehne desselben s, und die

die Doppel-Tangente t, des halben Bogens, gleichfalls erſtaunlich klein. Dieſe erſtaunlich kleinen Linien s und t können alsdann keinen beträchtlichen Unterſchied haben; und man wird ohne erheblichen Irrthum den kleinen Bogen b, der zwiſchen beyde Linien fällt, (§. 76.) entweder für s oder für t annehmen können, wenn die Gröſſe derſelben uns bekannt ſeyn ſollte.

Nun kann man den Sinus zu jedem, auch zu einem ſehr kleinen Winkel, oder das Verhältniß des Sinus zu dem Halbmeſſer berechnen, (§. 43.). Es ſind aber die Sinus halbe Sehnen der doppelten Winkel; folglich läßt ſich die Sehne eines ſehr kleinen Winkels, oder ihr Verhältniß zu dem Halbmeſſer, berechnen; imgleichen die Doppel-Tangente der Hälfte des in Betrachtung gezogenen kleinen Winkels. Denn das Verhältniß des Sinus zum Coſinus eines Winkels, iſt gleich dem Verhältniſſe der Tangente zum Halbmeſſer; und der Coſinus wird aus dem Sinus bekannt, (§. 27.) vermittelſt des pythagoriſchen Lehrſatzes. Es ſey alſo w + w ein ſehr kleiner Winkel, deſſen Bogen ſehr vielmal (oder m mal) in dem ganzen Umkraiſe enthalten iſt. Es kann ſin w und tan w berechnet werden, folglich auch 2 ſin w, oder die Sehne zu w + w, welche wir s genannt haben; und 2 tan w gleichfalls, welche wir t genannt haben. Nun ſey t — s gar kein beträchtlicher Unterſchied: ſo darf man den zu w + w gehörigen Bogen b, als das berechnete t oder s anſehen, und den ganzen Umkrais, welcher mb iſt, als t oder als

multi-

multiplicirt durch m, das ist, als ms oder mt. So hat man gefunden, daß der Umkrais oder die Peripherie P sich zu dem Halbmesser verhalte, wie 2 mal 3,141592, das ist, wie 2 mal $3\frac{1}{7}\frac{1}{15}\frac{1}{16}\frac{1}{33}$, zu 1. Folglich verhält sich der Umkrais P zu dem Durchmesser D, wie 3,141592 zu 1; oder kürzer, wie 3,14 zu 1, oder es ist der Durchmesser $D = \frac{P}{3,14} = \frac{P}{\pi}$. Denn ich will die Zahl 3,141592, oder 3,14 beständig π heissen. Also $D\pi = P$. Wenn an grosser Genauigkeit nichts gelegen ist, so kann man auch π als $3\frac{1}{7}$ oder sogar als 3 ansehen. Kurz, die Peripherie oder der Umkrais ist etwas über 3 mal länger, als der Durchmesser, womit er beschrieben ist. Dieser Ueberschuß beträgt etwa so viel, als der fünfte Theil der Sehne eines Quadranten, oder eines Winkels von 90 Grad. Weil nun der Umkrais ein Produkt aus π und aus D ist, und π beständig bleibt; so verhalten sich, wenn die Durchmesser ungleich sind, die Umkraise, oder zwey gleich benennte Theile derselben, (z. E. die Halbkraise, Quadranten und andre gleichbenannte Bogen,) zu einander, wie die Durchmesser. Von den Sinus, (folglich auch von den Sehnen,) Cosinus und Tangenten, ist oben (§. 41.) schon dasselbe bewiesen.

§. 78.

Nun ist der Zirkelkrais gleich dem Umfange eines unendlich vielseitigen regelmäßigen Vielecks, (§. 37.).

Daher

Daher ist die Zirkelfläche gleich (§. 67.) einem Triangel, dessen Grundlinie der ganze Umkrais, und dessen Höhe D: 2 oder der Halbmesser ist. Die Zirkelfläche ist also $= \pi D . (D:4)$ $\pi D^2 : 4$, oder der vierte Theil der durch π multiplicirten Quadratzahl des Durchmessers.

Und wenn ein Bogen, dessen Ausschnitt betrachtet wird, n mal in dem ganzen Umkraise enthalten ist; so ist klar, daß die Fläche des Ausschnitts so vielmal in der Zirkelfläche enthalten sey, als sein Bogen in dem ganzen Umkraise, nämlich n mal. Daher drückt man die Grösse eines Ausschnitts, der A heißt, aus durch diese Gleichung: $A = \pi D^2 : 4 n$.

Wenn man von dem Ausschnitte die Fläche des, auf die Sehne desselben Bogens gebaueten Triangels — Fig. 106. — dessen Spitze der Winkel w + w ist, subtrahirt; so bleibt die Grösse des durch die Sehne abgeschnittenen Abschnitts der Rest.

Aus diesem erhellet auch, daß, wenn die Durchmesser ungleich sind, das Verhältniß ihrer Quadratzahlen oder Quadratflächen gleich sey, dem Verhältnisse der zu ihnen gehörigen Zirkelflächen, dem Verhältnisse zweyer beyderseitigen Ausschnitte oder Abschnitte, welche zu einem Bogen von gleich viel Grad gehören.

§. 79.

Alle Zirkelflächen unter einander, alle zu demselben Winkel gehörige Ausschnitte unter

Digitized by Google

unter einander, alle solche Abschnitte unter einander, sind, ungeachtet der Verschiedenheit der Durchmesser, ähnlich figurirte Flächen, (§. 71. und 72.), weil die Linien, welche ihren Umfang ausmachen, allesammt ein solches Verhältniß haben, welches aus dem allgemeinen Verhältnisse des Durchmessers zu dem Umkraise folgt. Daher findet man die Fläche des Halbzirkels, folglich auch eines ganzen Zirkels, welche der Summe oder der Differenz zweyer andrer Flächen des Halbzirkels oder des ganzen Zirkels gleich seyn, oder zweymal, dreymal, viermal so groß seyn sollen, als eine vorgeschriebene, auf dieselbe Art, (§. 74.) wie bey andern ähnlichen Flächen, nämlich dadurch, daß man die Durchmesser als harmonische Seiten dieser Flächen ansieht.

VIII.

Von den Körpern.

§. 80.

Diejenigen Winkelpunkte in zwey gleichen und ähnlichen Flächen, die an der Spitze derselben Winkel liegen, oder zwey andre Punkte in dem innern und dem andern Umfange, die von eben denselben Winkelpunkten in beyden Flächen gleich weit abstehen, (also — Fig. 107. — die Punkte A und a, B und b, u. s. w. auch die Punkte L u. l), nenne

nenne ich in Vergleichung beyder Figuren, harmonischer Punkte.

Man stelle sich eine Ebene (nicht in vorwärtslicher, sondern in seitwärtslicher) paralleler Bewegung (§. 61.) vor, vermöge welcher sie nicht in derselben Ebene bleibt. Man denke die erste und letzte Spur, welche diese Ebene macht. Man denke auch alle Spuren, welche von dem Umfange dieser bewegten Ebene gemacht sind, sehr nahe an einander, und ihre Zwischenräume mit Flächen ausgefüllt. So umschließt die erste und letzte Spur dieser Ebene, imgleichen der Zusammenhang derer Flächen, welche durch die Figur der bewegten Ebene beschrieben sind, den Umfang eines Körpers, welchen man prismatisch, oder ein Prisma nennt. Dergleichen sind, Fig. 108, 109, 110, 111, abgezeichnet.

Die erste und letzte Spur einer so bewegten Fläche sind unter einander ähnlich und gleich; und die harmonischen Punkte derselben liegen so unter einander, daß die Linien, zwischen welchen sie sind, paarweise parallel sind. Also sind die Winkel an solchen harmonischen Punkten gleichfalls parallel und gleich, (§. 58.).

Und wenn ein Prisma von einer Ebene parallel mit den Grundflächen, das ist, mit der ersten und letzten Spur der bewegten Ebene durchschnitten wird; so ist der ihnen parallele Durchschnitt auch ihnen ähnlich und gleich.

Man

Man unterscheidet an einem Prisma von den parallelen Grundflächen die Seitenflächen, welche von den Linien, woraus die Figur der Grundfläche besteht, in der parallelen Bewegung beschrieben werden.

Es sind alle Linien zwischen zweyen harmonischen Punkten der beyden Grundflächen einander parallel. Man kann dieses unmittelbar aus der parallel vorausgesetzten Bewegung der Grundfläche schliessen; aber auch auf folgende Art. In der Grundfläche A mögen zwey Punkte der Figur durch eine gerade Linie verknüpft seyn. In der Grundfläche B liegt zwischen denselben harmonischen Punkten, dieselbe Linie, mit jener parallel. Diese zwey gleich langen Parallellinien sind durch zwey Linien, welche aus den Endpunkten durch die Seitenflächen gehen, verknüpft. Alle vier machen also (§. 23.) ein Parallelogramm. Daher sind auch zwey, zwischen harmonischen Punkten der Grundflächen durch die Seitenfläche gezogene, Linien einander parallel.

Aus gleichem Grunde erhellet, daß, wenn die Grundfläche eines Prisma eine geradelinichte Figur hat, **der Zusammenhang der Seitenflächen aus lauter Parallelogrammen besteht.**

Vielleicht ist Einigen **folgende Vorstellung von einem Prisma einleuchtender.** Man ziehe aus sehr nahe aneinander liegenden Punkten der Figur einer Fläche, in eine andre Fläche hinein, gleich lange Parallellinien; die Endpunkte in der andern Fläche verbinde man durch Zwischen-

Digitized by Google

linien. So entsteht die Figur der andern Grundfläche, die man in Gedanken mit Fläche ausfüllt. So füllt man auch aus, den Zwischenraum zwischen jedem Paar derer von der einen zur andern Grundfläche gehenden Linien. Alsdann umfassen die beyden Grundflächen und die Seitenflächen das Prisma.

Stehen nun die Seitenflächen auf beyden Grundflächen rechtwinkelicht, (§. 58.); so sind die Prismata gerade, (wie Fig. 108, 109, 110). Stehen sie schiefwinkelicht drauf; so sind sie schief (wie Fig. 111).

§. 81.

Wenn die beyden Grundflächen, Quadratflächen sind; so können nur 4 Seitenflächen seyn. Und wenn jede Seitenfläche auch eine, der Grundfläche gleiche, Quadratfläche ist, und rechtwinkelicht auf jeder Grundfläche steht, so sind in allem 6 gleiche Quadratflächen, welche den Körper umschliessen, und welche (§. 59.) paarweise parallel sind. Ein solcher, von 6 gleichen rechtwinkelicht stehenden Quadratflächen eingeschloßner, Körper — Fig. 108. — heißt ein Würfel, oder ein cubischer Körper.

Ueberhaupt wenn die beyden Grundflächen Parallelogrammen sind, und wenn also das Prisma von 6 paarweise gleichen und parallelen Parallelogrammen eingeschlossen ist; so nennt man es — Fig. 109. — ein Parallelepipedum. Ein solches

Digitized by Google

ches ist gerade oder, schief. Zu den geraden gehört selbst der Würfel.

§. 82.

Den Zirkelkrais kann man (§. 75.) sich als die Figur eines unendlich vielseitigen regelmäßigen Vielecks vorstellen. Also giebt es auch Prismata, (§. 80.), deren zwey Grundflächen Zirkelflächen sind. Solche Prismata heissen Cylinder, und zwar gerade, wenn, (wie — Fig. 112. —) die Seitenflächen auf den Grundflächen rechtwinkelicht stehen; schiefe aber — Fig. 113. — wenn eine schiefwinkelichte Verbindung zwischen den Seitenflächen und Grundflächen ist. Die Figur des geraden Cylinders kann man sich auch so vorstellen, als wenn sie beschrieben wäre, durch die kraisförmige Bewegung eines Rechtecks rund herum um eine seiner Seiten, welche alsdann eine Axe genannt wird. Daher heißt auch die Axe eines geraden Cylinders, die gerade Linie von dem Mittelpunkte der einen Grundfläche zu dem Mittelpunkte der andern.

§. 83.

Man stelle sich die Linien des Umfanges einer Grundfläche durch unendlich viele Schneidepunkte getheilet vor. Man ziehe von jedem dieser Punkte gerade Linien in einen einzigen gemeinschaftlichen Punkt hinein, der in einer andern Fläche liegt. Diese Linien stelle man sich als Endlinien von Flächen vor. So laufen diese Flächen in eine Spitze zusammen, welche man ein Körpereck nennt.

Digitized by Google

Dieselben Seitenflächen nebst der Grundfläche umschliessen einen körperlichen Raum, welcher eine **Pyramide** genennt wird. Sie ist entweder **gerade** oder schief. Gerade Pyramiden haben von ihrer Spitze bis in den Mittelpunkt ihrer Grundfläche eine auf der Grundfläche rechtwinkelicht stehende Linie. Dieser Mittelpunkt ist bey unregelmäßigen Flächen nicht allemal leicht zu bestimmen. Aber im Parallelogramme ist er z. E. da, wo die beyden Diagonalen sich schneiden. Eine gerade Pyramide ist — Fig. 114. — gezeichnet. Hingegen heißt sie schief, (— Fig. 115. —) wenn die Linie aus diesem Mittelpunkte nach der Spitze, auf der Grundfläche nicht rechtwinkelicht steht. Wenn der Obertheil einer Pyramide (wie — Fig. 116. —) durch einen Durchschnitt so weggenommen wird, daß die dadurch entstehende obere Grundfläche mit der untern parallel ist; so nennet man den untern Rest eine abgekürzte Pyramide.

Wenn die Grundfläche der Pyramide eine geradelinichte Figur hat; so sind die Seitenflächen allesammt Triangel.

§. 84.

Man denke, daß ein halbes Rechteck oder ein rechtwinkelichter Triangel sich um eine seiner kürzern Seiten, als um eine Axe, rund herum bewege;

Digitized by Google

wege; so beschreibt er den Umfang eines Körpers, welchen man einen geraden Kegel nennt. Eine lehrreichere Vorstellung aber von dem Kegel überhaupt ist diese, daß er sey eine Pyramide, auf einer solchen Grundfläche, welche eine Zirkelfläche ist. Des geraden Kegels Axe, das ist, die Linie von dem Mittelpunkte der Grundfläche bis in die Spitze, steht auf der Grundfläche rechtwinkelicht, (— Fig. 117. —) aber nicht in dem schiefen Kegel, (— Fig. 118. —). Wird der Kegel oben durch einen Durchschnitt, welcher der Grundfläche parallel, und folglich auch ein Zirkel ist, (— Fig. 119. —) abgekürzt: so heißt der untere Rest ein abgekürzter Kegel.

§. 85.

Wenn ein halber Zirkelkrais sich um seinen Durchmesser, als um seine Axe, rund herum bewegt; so beschreibt er den Umfang eines Körpers, welchen man eine Kugel (— Fig. 120. —) nennt, und dessen Umfang allenthalben von dem Mittelpunkte gleich weit entfernt ist.

Eine jede gerade Linie von dem Umfange der Kugel, durch den Mittelpunkt, bis wieder in den Umfang, ist ein Durchmesser der Kugel, dessen Hälfte von dem Mittelpunkte bis in den Umfang reichet, und sein Halbmesser genannt wird. Der Durchmesser und Halbmesser derselben Kugel, sind also unzählig viele.

Digitized by Google

§. 86.

Wenn eine Ebene in einerley vorwärtslichen Richtung sich bewegt, und in dieser Bewegung eine Kugel irgendwo durchschneidet, oder einen Durchschnitt der Kugel macht, so werden aus der Kugel zwey Abschnitte, deren Grundflächen gleiche Zirkelflächen sind. Denn man denke aus der Figur, welche die Grundfläche eines solchen Abschnittes umgränzt, allenthalben Linien, bis in den Mittelpunkt der Kugel. Diese Linien sind als Halbmesser der Kugel allesammt gleich, und also sind sie die Seitenlinien einer geraden Pyramide, (§. 83.) oder, (weil die Figur der untersuchten Flächen krummlinicht ist,) eines geraden Kegels, (§. 84.) dessen Grundfläche allerdings eine Zirkelfläche seyn muß.

Daher kann man auf der Oberfläche einer Kugel unzählig viele Zirkelkraise gedenken. Denn die Figur der Grundfläche eines jeden Abschnittes ist ein Zirkelkrais. Unter diesen Zirkelkraisen sind die größten diejenigen, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt der Kugel ist. Denn eines jeden andern auf der Kugel befindlichen Zirkelkraises Durchmesser umschließt, mit zweyen von seinen Endpunkten nach dem Mittelpunkte der Kugel hingehenden Halbmessern der Kugel, einen Triangel, und ist also kleiner, als die Summe zweyer Halbmesser der Kugel. Daher sind die größten Zirkelkraise, (deren gleichfalls unzählig viele gedacht werden können,) die Figuren der Halbkugeln. Die

andern

andern heissen die kleinern Zirkelkraise auf der Kugel, und begränzen solche Abschnitte, deren Grundflächen den Mittelpunkt der Kugel nicht in sich fassen.

Ein Ausschnitt einer Halbkugel wird genannt ein Theil derselben, welcher liegt zwischen vier Ebenen, deren erste ist die Grundfläche, das ist, ein (nach einem gewissen Winkel sich richtender) Ausschnitt aus der Grundfläche der Halbkugel. Zwey andre dieser Ebnen sind Quadrantenflächen, oder halbe, durch einen Bogen von 90 Grad umgränzte, Grundflächen einer Halbkugel. Die vierte (dieser den Kugelausschnitt einschliessenden Flächen) ist endlich ein Theil der Oberfläche der Kugel zwischen den drey Bogen, wodurch die drey ersten Flächen sich endigen. Man sehe — Fig. 121. — Zwey solche Ausschnitte der Halbkugel, nämlich eine obere und eine untere, welche eine gemeinschaftliche Grundfläche haben, heissen zusammen ein Ausschnitt der ganzen Kugel.

Ein Ausschnitt der Halbkugel wird also beschrieben, von der Quadrantenfläche, wenn sie sich um einen der Halbmesser, zwischen welchen sie liegt, als um eine Axe, doch nicht gänzlich herum, bewegt. Giebt man eine solche Bewegung einem Halbkraise um den Durchmesser; so wird ein Ausschnitt der ganzen Kugel beschrieben.

§. 87.

Die Höhe eines Prisma, eines Cylinders, einer Pyramide und eines Kegels,

Digitized by Google

(§. 80—84.) ist die Distanz zwischen ihren obern Grundflächen, (oder zwischen denen, mit ihren untern Grundflächen parallelen, Ebenen, in welche ihre Spitzen fallen,) und zwischen ihren untern Grundflächen; folglich ist ihre Höhe (§. 59.) die auf beyden gesagten Ebenen rechtwinkelicht stehende Zwischenlinie.

Die Seite einer geraden Pyramide, oder eines Kegels, (das ist, die gerade Linie von den Winkelpunkten, oder von einem Punkte des Zirkelkraises an der Grundfläche bis in die Spitze,) ist also von ihrer Höhe unterschieden. Denn die Seite ist länger.

Ein der Grundfläche paralleler Durchschnitt durch ein Prisma, (folglich auch durch einen Cylinder,) macht eine Fläche, welche mit der Grundfläche ganz einerley, nämlich ihr ganz gleich und ähnlich ist. Dieses folgt unmittelbar aus dem ersten Begriffe von einem Prisma oder Cylinder.

Geschicht ein solcher Durchschnitt durch eine Pyramide: so wird die Fläche des Durchschnitts zwar kleiner, als die Grundfläche, aber ihr sowohl ähnlich als parallel. Man denke sich die Triangel, TRA, TRE, TRI, woraus die Seitenflächen einer Pyramide bestehn, und deren Grundlinien die Figur der Grundfläche ausmachen. Man denke also der Triangel so viel, als Seiten der Grundfläche sind. Vermittelst des beschriebnen Durchschnittes, wird

von

Digitized by Google

Dreiecken jeden dieser Triangel ein oberer conformirter kleiner Triangel (§. 28.) abgeschnitten; tra von TRA, tre von TRE, tri von TRI, u. s. w. Die Figur des Durchschnitts aber besteht aus denen (mit den Grundlinien der grössern conformirten Triangel) parallelen Grundlinien der obern kleinern Triangel. Die grössern Grundlinien GA, GE, GI, verhalten sich zu den kleinern, zu ga, ge, gi, paarweise, wie paarweise die Höhen HA, HE, HI, zu ha, he, hi. Aber das Verhältniß der Höhen ist in allen Paaren gleich, zwischen der Spitzenfläche und der Grundfläche; es ist HA : ha = HE : he = HI : hi. Denn (§. 60.) HA, HE, HI, liegen zwischen denselben parallelen Flächen, zwischen der Spitzenfläche und Grundfläche, gleichwie auch ha, he, hi, als welche zwischen der Spitzenfläche und dem Durchschnitte sind. Also verhält sich GA : ga = GE : ge = GI : gi. Also sind die Winkel (welche zwischen den Seitenpaaren, zwischen GA, GE, und ga, ge; zwischen GE, GI, und ge, gi, liegen,) paarweise einander gleich. (§. 56.) Daher sind die Durchschnitte und Grundflächen einander ähnlich. (§. 71, 72.)

Also sind solche Durchschnitte eines Kegels lauter Zirkelflächen, (§. 75.) weil er eine unendlich vielseitige Pyramide ist.

Es verhält sich aber der parallele Durchschnitt einer Pyramide zu der Grundfläche, wie das Quadrat der Höhe des obern Abschnitts, zu dem Quadrate der Höhe des

Digitized by Google

ganzen Körpers. Denn (§. 72.) es verhält sich der Durchschnitt D zur Grundfläche F; ich sage, $D : F = (ga)^2 : (GA)^2 = (ha)^2 : (HA)^2 = (he)^2 : (HE)^2 = (hi)^2 : (HI)^2$. Aber die Verhältnisse der Höhen dieser Triangel sind allesammt gleich dem Verhältnisse der zu der kleinern und zu der grössern Pyramide gehörigen Höhen, welche mit ihnen zwischen denselben Parallelflächen sind, (§. 60.) und ho, HO heissen mögen. Also kann man für $(ga)^2 : (GA)^2$ setzen $(ho)^2 : (HO)^2$. Also $D : F = (ho)^2 : HO)^2$.

Die Zirkelfläche des parallelen Durchschnitts durch einen Kegel, verhält sich zu der Zirkelfläche des Grundes, wie die Quadrate des kleinern und grössern Durchmessers, oder wie die Quadrate der zu dem kleinern und grössern Kegel gehörigen Höhen. Die erste Proportion ist (§. 79.) bewiesen. Die zweyte folgt aus der ähnlichen Beschaffenheit eines Kegels, und einer Pyramide.

§. 88.

Man stelle sich zwey Körper vor, zwischen einer und derselben Reihe durchdringlicher Parallelflächen, welche einander unendlich nahe sind, und beyde Körper durchschneiden, so daß der eine Körper abgetheilt gedacht werden kann, in die Streifen A, B, C, D, u. s. w. der andere aber in die Streifen a, b, c, d, u. s. w. Wenn der Streifen beyderseits gleich viele sind; und wenn (der verschiedenen Figuren ungeachtet) nach

Digitized by Google

nach dem körperlichen Inhalte, Gleichheit ist unter jedem Paare der, zwischen denselben Flächen befindlichen, Streifen, nämlich unter A und a, und unter B und b, u. s. w; so ist unläugbar, daß diese Körper gleich sind.

Weil solche Streifen eine unendlich kleine Höhe haben, so darf man annehmen, daß die Grundflächen eines so kleinen Streifens nicht verändert sind.

Also sind gleich alle (§. 80) prismatische Körper, deren Höhen (§. 87.) und deren Grundflächen, ungeachtet der verschiedenen Figuren, gleich sind; folglich auch alle Parallelepipeda (§. 81.) und Cylinder, welche gleiche Grundflächen und Höhen haben. Denn sie haben eine gleiche Anzahl gleicher körperlichen Streifen.

Sind zwey Prismata an Grundfläche gleich, an Höhe ungleich; so verhält sich der kleinere prismatische Körper zu dem grössern, wie die kleinere Höhe zu der grössern Höhe. Denn ein solcher Körper nimmt an Grösse zu und ab, nach Proportion der Zunahme und Abnahme der Höhe. Es habe z. E. ein Prisma P, von gewisser Grundfläche g, die Höhe h. Wird diese Höhe nach und nach, oder in andern Fällen, 2h, 3h, 4h, u. s. w. so entsteht die Körpergrösse 2P, 3P, 4P, u. s. w. Wird die Höhe $\frac{h}{2}, \frac{h}{3}, \frac{h}{4}$, u. s. w. so entstehen die Körper $\frac{P}{2}, \frac{P}{3}, \frac{P}{4}$, u. s. w.

Also

Also verhalten sich solche, an Grundfläche gleiche, Prismata, wie die Höhen.

Sind aber die Höhen gleich, so verhalten sie sich, wie die Grundflächen. Der Beweis dieses Satzes ist dem vorigen Beweise ähnlich.

Es mögen pra, pre, pri, Prismata seyn. Von pra sey die Grundfläche fla, die Höhe ha; von pre sey die Grundfläche fle, die Höhe he; von pri sey die Grundfläche fli, die Höhe hi. Es sey aber fli = fla; es sey hi = he. So ist

pra : pri = ha : hi } vermöge des
pre : pri = fle : fli } Vorigen.

$$\frac{pra}{pre} : 1 = \frac{ha}{fle} : \frac{hi}{fli} \text{ (Folgerung.)}$$

$$\frac{pra}{pre} : 1 = \frac{ha}{fle} : \frac{he}{fla} \text{ (nach Voraussetzung.)}$$

pra : pre = (fla . ha) : (fle . he) (Folgerung.)

Oder in Worten: es verhalten sich zwey Prismata (pra und pre) zu einander, wie die Produkte aus ihren Grundflächen und Höhen, wenn man nämlich einerley Linien-Einheit in beyden Fällen zum Fundamentalmaaß nimmt. Die Cylinder und Würfel sind unter dieser Regel mit begriffen. Wenn z. E. die Seite, das ist, die Seitenlinie eines Würfels, 4 Zoll, folglich seine Grundfläche 16 Zoll, und seine Höhe auch 4 Zoll, also das Produkt der Grundfläche und Höhe 64 Zoll betrüge; und wenn ein Balken-

förmi-

Digitized by Google

förmiger Körper von 10 Zoll in der Grundfläche, 9 Zoll Höhe hätte, und also das Produkt seiner Höhe und Grundfläche 90 Zoll betrüge; so verhielte sich jener Würfel zu diesem Balken an Körpermaaß, wie 64 zu 90. Daher kann man das Produkt der Grundfläche und Höhe eines Körpers (der zu einer solchen Berechnung regelmäßig genug ist) für das bestimmte Maaß seiner Grösse ansehn. Daher ist die Grösse eines Cylinders, (§. 78.) $\frac{\pi D^2}{4}$. h, das Produkt der Grundfläche und Höhe; und, wenn D = h; so ist sie $\frac{\pi D^3}{4}$

§. 89.

Dieses wird uns noch einleuchtender, wenn wir uns (— Fig. 109. —) die körperliche Grösse als vertheilet, unter eine unendliche Anzahl von unendlich kleinen Würfeln vorstellen. Solcher Würfel können auf der Grundfläche desto mehr neben einander stehen, je grösser sie ist, (oder je grösser, wenn sie eine geradelinichte parallelogrammische oder triangulaire Figur hat, das Produkt ihrer Grundlinie und Höhe ist.) Ferner können, (wenn die Anzahl jener auf die Grundfläche gesetzten Würfel z heißt,) so viele Schichten von Würfeln (immer in der Anzahl z) auf einander gesetzt werden, als h, oder als die Höhe dieses prismatischen Körpers beträgt, wenn nämlich sowohl die zu h, als die zu z gehörige Einheit eine

linien-

linienseite des unendlich kleinen Würfels ist. Also 1, multiplicirt durch h, oder die Grundfläche multiplicirt durch die Höhe, zeigt uns die Anzahl der kleinen Würfel an, welche in dem Umfange eines prismatischen Körpers Raum haben. Also wird uns durch dieses Produkt die körperliche Grösse angezeigt. Unser gewöhnliches Fundamentalmaaß der Linien (z. E. ein Zoll) ist freylich gröſſer, als die Seite eines unendlich kleinen Würfels. Aber dieses hindert uns nicht, die körperlichen Grössen durch das Produkt aus der Grundfläche und Höhe, als durch das bestimmende Maaß, zu berechnen. Denn wenn nach dem Zollmaaß, oder nach irgend einer fest stehenden Einheit, das Produkt aus der Fläche F und aus der Höhe H, zu dem Produkte aus f und h ein gewisses Verhältniß hat; so bleibt dieses Verhältniß auch, wenn wir die beyderseitigen Factoren nach einer andern fest stehenden Einheit berechnen. Wir wollen den Fall setzen, der Eine rechnet nach Zollen, der Andre nach Fuß.

Der erste findet an dem Prisma P
1) an der Grundfläche
8 an Grundlinie; 10 an Höhe; 80 an Grundfläche.
2) an der körperlichen Höhe - - 30.
3) also an Körpermaaß - 2400 (Zollmaaß)

An dem Prisma p
1) an der Grundfläche

5 an

an Grundlinie; 8 an Höhe; 40 an Grundfläche.

2) an der körperlichen Höhe - - 15

3) an Körpermaaß - 600 (Zollmaaß)

Der andre, der nach Fuß zu 10 Zoll rechnet, findet an dem Prisma P

1) an der Grundfläche

$\frac{4}{5}$ an Grundlinie; 1 an Höhe; $\frac{4}{5}$ an Grundfläche,

2) an der körperlichen Höhe - - 3

3) an Körpermaaß - - $2\frac{4}{5}$ (Fußmaaß)

An dem Prisma p

1) an der Grundfläche

$\frac{1}{2}$ an Grundlinie; $\frac{1}{2}$ an Höhe; $\frac{1}{2}$ an Grundfläche,

2) an der körperlichen Höhe - - $1\frac{1}{2}$

3) an Körpermaaß - - $\frac{1}{2}$ (Fußmaaß).

Alsdann sagt der eine, es verhalte sich

$$P : p = 2400 : 600.$$

Der andre sagt, es verhalte sich

$$P : p = 2\frac{4}{5} : \frac{3}{5}$$

Aber diese Verhältnisse sind gleich. Daher kann ein jeder, nach seiner Art zu rechnen, das Produkt aus der Grundfläche und Höhe, als das Körpermaaß ansehen.

§. 90.

Aber der unregelmäßigen Körper Grundfläche und Höhe kann man nicht berechnen. Sind sie klein, so kann man sich der

Hülfe

Hülfe des Wassers auf folgende Art bestimmen, (wobey aber vorausgesetzt wird, daß der Körper keine merkliche Menge Wasser in sich einlasse, oder nicht durch die Nässe besonders anschwelle). Man mache ein hohes Gefäß, mehr hoch als weit, z. E. ein gerades Prisma.

An demselben müssen, nahe bey einander, Zeichen seyn von $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$ der Höhe, u. s. w. Man muß wissen, wie viel Würfel Wassers (die Seite des Würfels sey 1 oder $\frac{1}{2}$, oder $\frac{1}{4}$ Zoll) in das Gefäß gehen, wenn es voll ist. So weiß man auch, wie viel hinein gehe, wenn das Wasser nur bis an ein gewisses Zeichen steht. Nun werfe man in ein anders Gefäß, welches zum Theil mit Wasser gefüllet ist, und gleichfalls einige Merkzeichen der Höhe hat, den Körper, dessen Inhalt man messen will; und man gebe Achtung, wie hoch das Wasser stehe, wenn er drinnen ist. Hat man ihn nun vorsichtig heraus genommen; so gießt man so viel, durch das erste Gefäß gemessenes Wasser zu, bis es wieder so hoch steht, als vorher. Das bestimmende Maaß des zugegossenen Wassers (oder seinen trocknen Sandes) ist auch das bestimmende Maaß des gemessenen Körpers.

Sind aber die unregelmäßigen Körper zu groß; so müssen wir uns mit Vermuthungen behelfen. Wir setzen in Gedanken so viel zu, oder nehmen so viel ab, daß sie regelmäßig werden; alsdann berechnen wir das Regelmäßige nach Regeln; und das Zugesetzte oder Abgenommene nach Ver-

Digitized by Google

Vermuthung, wenn wir es nicht etwa, in anderer Form, regelmäßig machen und berechnen können.

§. 91.

Wenn man bloß mit Linien beschäftigt ist, so nennt man ihre Grösse die Länge, und ihr Maaß das Längenmaaß.

Wenn man mit Flächen beschäftigt ist, die man berechnen, oder mit berechneten vergleichen kann; so braucht man an Statt der Wörter Grundlinie und Höhe, irgend ein Paar von diesen: Länge, Höhe, Breite. Das Produkt aus diesen zwey Linien heißt das Flächenmaaß oder Quadratmaaß, weil dadurch die Anzahl Quadratflächen (von einer gewissen Grösse) bestimmt sind, welche auf der gemessenen Fläche Raum haben.

Wenn man mit körperlichem Inhalte beschäftigt, und der Körper regelmäßig genug dazu ist, (wie die Prismata); so berechnet man ihn aus dem Produkte dreyer Linien. Das Produkt zweyer, giebt die Grundfläche. Die dritte haben wir bisher die Höhe des Körpers genannt. Das Produkt der Grundfläche durch diese Höhe ist das Körpermaaß. Man benennt aber diese drey Linien in verschiedenen Fällen durch drey der folgenden Namen: Länge, Breite, Höhe, Tiefe, Dicke. Das, aus solchen drey Linien berechnete, Körpermaaß, heißt das Würfelmaaß, oder Cubikmaaß, weil es anzeigt, wie viel Würfel (von

einer gewissen Seite) in dem Umfange des Körpers Raum finden.

§. 92.

No. 1.) Zwey Pyramiden, (die Kegel mit eingeschlossen,) wenn sie gleiche, obwohl verschiedner Weise geformte, Grundflächen, und gleiche Höhen haben, sind gleich, sie mögen gerade oder schief seyn. Denn das Verhältniß ihrer Grundfläche zu einem mit ihr parallelen Durchschnitte, ist gleich dem Verhältnisse des Quadrats der Höhe, von der Spitze bis zur Grundfläche, zu dem Quadrate der Höhe von der Spitze bis zu dem Durchschnitte. (§. 87.) Wenn nun der Durchschnitt zweyer so beschaffenen Pyramiden in derselben Weite von den Grundflächen geschieht: so ist in beyden dieses Verhältniß der Höhen, folglich auch das Verhältniß ihrer Quadrate gleich. Daher ist auch gleich das beyderseitige Verhältniß der Grundflächen zu ihren Durchschnitten. Folglich, da die Grundflächen gleich sind; so sind auch solche Durchschnitte gleich. Also bestehn solche Pyramiden (und Kegel) aus gleich vielen gleichen körperlichen Streifen, (zwischen parallelen Durchschnitten,) und sind gleich. (§. 88.)

No. 2.) Daher verhalten sich (nach dem oben §. 88. geführten Beweise) auch die Pyramiden oder Kegel zu einander, wie die Produkte aus ihren Grundflächen und Höhen. Doch kann dieses Produkt nicht ihr Maaß genannt werden, weil ihr Cubikmaaß (§. 91.) sonst dem

Cubik-

Digitized by Google

Cubikmaasse eines Prisma oder Cylinders von solcher Grundfläche und Höhe gleich wäre, welches wegen der zugespitzten Form nicht seyn kann.

No. 3.) Also ist das Verhältniß einer jeden Pyramide zu dem ihr zugehörigen Prisma, (welches mit ihr einerley Grundfläche und Höhe hat,) gleich dem Verhältniß einer jeden andern Pyramide zu ihrem Prisma. Denn wenn die Pyramiden Pa und Pe, die Prismata Pra und Pre; die Grundflächen Fla und Fle, die Höhen Ha und He heissen; so ist (§. 87.)
Pa : Pe = (Fla × Ha) : (Fle × He) = Pra : Pre.
Also Pa : Pra = Pe : Pre.

No. 4.) Ein Würfel besteht aus sechs Pyramiden, an Grundfläche, wie der Würfel; an Höhe wie die halbe Höhe des Würfels. Diese Pyramiden haben allesammt (— Fig. 122 —) ihre Spitze an dem in dem Würfel befindlichen Mittelpunkte. Also ist der Würfel gleich drey Pyramiden, deren jede zweymal so groß ist, als eine der vorigen; das ist, drey solchen, die bey derselben Grundfläche die ganze Höhe des Würfels haben. (No. 2.) Daher ist der Würfel gleich 3 (zu ihm gehörigen) Pyramiden, von seiner eignen Grundfläche und Höhe. Also ist eine seiner Pyramiden das Drittel von ihm. Folglich ist (No. 1. u. §. 88.) jede Pyramide das Drittel des zu ihr gehörigen Prisma von derselben Grundfläche und Höhe. Und weil Cylinder wie Prismata, und Kegel wie Pyramiden sind: (§. 83, 84.) so

Digitized by Google

ist eben dieses von Cylindern und Kegeln wahr.

§. 93.

No. 1.) Des Cylinders gebogne Fläche ist, (weil man die Figur seiner Grundfläche, den Zirkelkrais, als die Figur eines Vielecks ansehn kann,) eine Summe von Rechtecken, deren Höhe die Höhe des Cylinders, und deren Grundlinie eine Seite des Vielecks ist; folglich ist sie ein einziges, jener Summe gleiches, Rechteck, welches die gesagte Höhe, aber die Länge des Zirkelkraises zur Grundlinie hat. Oder diese gebogne Fläche hat, (wenn die Höhe H, und der Zirkelkrais πD heißt, (§. 77.)) die Grösse, welche ausgedrückt wird durch πDH. Wäre $H = D$, (oder der Durchmesser,) so wäre die Grösse jener Fläche πD^2.

No. 2.) Von der Spitze des Ausschnitts einer Zirkelfläche, bis in den Bogen, sind lauter gleich lange Linien, zwischen welchen die zugespitzten Flächen liegen. So ist es auch mit der gebognen Oberfläche eines geraden Kegels. Daher ist sie der Fläche F — Fig. 123. — eines solchen Ausschnitts gleich, wenn der Bogen gleich ist, dem ganzen Umkraise (— Fig. 124. —) der Grundfläche des Körpers, das ist, (§. 75 und 77.) wenn er gleich ist der Linie π (qr), und wenn der Halbmesser des Ausschnitts gleich ist der Seite des Kegels, (das ist, der geraden Linie sq, von der Spitze bis in den Krais der Grundfläche.) Die Fläche dieses Ausschnitts aber ist gleich ABC dem dabeystehenden

rechts

rechtwinkelichten Triangel (— Fig. 125. —) von Höhe, wie die Seite des Kegels, oder wie der Halbmesser des Ausschnitts; von Grundlinie, wie der Umkrais des Kegels, oder wie der Bogen des Ausschnitts, (§. 75, 76.).

No. 3.) Es stellet L — Fig. 124. — von der Grundfläche an, bis an den (mit ihr parallelen) Durchschnitt mn, einen abgekürzten Kegel vor. Nämlich der Kegel K ist von dem Ganzen K+L weggenommen. Die krumme Oberfläche auf dem abgekürzten Kegel L ist (— Fig. 124. und 125. —) gleich dBCh, das ist, dem Reste des Triangels ABC, wenn gemacht ist Sq = AB, und Sm = Ad; folglich mq = dB. Folglich ist diese Oberfläche gleich dem Rechtecke dBif, wenn gemacht ist de = eB, und wenn in paralleler Lage sind die gleichen Linien Bi und eg und df. Beweis. Der Krais (§. 77.) $\pi(mn):\pi(qr) = mn:qr = Sm:Sq$ (§. 28.) = dh : BC. Aber BC = π(qr,) (nach Voraussetzung.) Also der Krais $\pi(mn):\pi(qr)$ = dh : π(qr.) Also ist der Krais π(mn) = dh. Der Triangel Adh ist also (wegen No. 2.) die krumme Fläche des weggenommenen Kegels K. Daher ist der Rest des Triangels auch der Rest der krummen Fläche, welcher auf dem abgekürzten Kegel L ist. Dieser Rest des Triangels aber, dBCh, ist (wegen Gleichheit der kleinern Triangel,) gleich dem Rechtecke dBif.

No. 4.) Wegen desselben Beweises No. 3. ist, (wenn man — Fig. 124 und 125. — und wenn

Digitized by Google

man Kraise mit andern Linien vergleicht) $\pi(op) = eg$, wenn, gleichwie de die Hälfte von dB ist, also das Stück der Seite des Kegels mo die Hälfte von mq ausmacht.

No. 5.) Und weil ein jeder ganze Kegel angesehn werden kann, als ein abgekürzter, (nämlich nach der Subtraction eines unendlich kleinen Kegels an der Spitze:) so ist die krumme Oberfläche eines jeden geraden Kegels gleich einem Rechtecke, dessen Höhe die Seite des ganzen Kegels ist, und dessen Grundlinie dem Umkraise des halben Durchmessers seiner Grundfläche gleichet. Wenn — Fig. 126. — in dem Kegel abc der mit bc parallele Durchmesser de, die Hälfte des Durchmessers bc ist, (welches Statt findet, wenn der mit der Grundfläche parallele Durchschnitt in der halben Höhe des Kegels, oder durch die Hälfte der Seite ab geschicht:) so ist die krumme Fläche dieses ganzen geraden Kegels das Rechteck $(\pi de)(ab)$. Daher verhalten sich die krummen Flächen zweyer geraden Kegel zu einander, wie die Produkte aus ihren Durchmessern, (oder Halbmessern,) und aus ihren Seiten.

Der Ausschnitt eines Kegels ist eine auf einen Ausschnitt seiner Grundfläche gesetzte Pyramide, die mit dem Ganzen dieselbe Spitze hat. Ihre krumme Fläche verhält sich zu der ganzen, wie der Bogen ihrer Grundfläche zu dem ganzen Kraise.

§. 94.

Digitized by Google

§. 94.

Nun zur Untersuchung der krummen Oberfläche einer Kugel; und anfangs nur einer Halbkugel! Ich muß aber verschiedene Vorerinnerungen geben.

No. 1.) In der halben Zirkelfläche — Fig. 127. — deren Durchmesser ab, und deren Halbmesser ak = kb = ki ist, nenne ich Streifen, die Flächen zwischen den Linien, nämlich zwischen ab und cd, zwischen cd und ef, zwischen ef und gh, zwischen gh und der unendlich kleinen Linie bey dem Punkte i. Diese Linien sind allesammt dem Durchmesser parallel, und heissen Ordinaten; ihre Hälften aber kb, nd, mf, u. s. w. heissen (zuweilen) Semiordinaten des Streifens, der zwischen ihnen liegt. Die mittlere ganze Ordinate eines Streifens, und eben so die mittlere Semiordinate desselben, nenne ich diejenige, welche durch die mittlere Höhe des Streifens geht. Z. E. wenn mn die Hälfte ist von mk; so ist cd die mittlere Ordinate, und nd die mittlere Semiordinate des Streifens, welcher zwischen den Ordinaten ef und ab liegt. Die Höhe des Streifens aber ist die Entfernung seiner beyden Ordinaten; (man heißt diese Höhe auch die Abscissendifferenz.) Daher sind kn, nm, ml, li, lauter Höhen oder Abscissendifferenzen, der zu ihnen gehörigen Streifen. Den Rand des Streifens aber nenne ich die beyden Bogen, welche den Streifen endigen. Z. E. die Bogen ae und bf sind der beyderseitige Rand des Streifens zwischen ab

Digitized by Google

und ef, und können, wenn sie unendlich klein sind, für gerade Linien angenommen werden.

No. 2.) Nun ist klar, daß eine Halbkugel entstehe, wenn die Quadrantenfläche ikb sich um die Axe ik gänzlich herum bewegt. In dieser Halbkugel sind körperliche Streifen, welche mit den Flächenstreifen zwischen den Ordinaten und Semiordinaten harmoniren; die Höhe dieser körperlichen Streifen ist gleich ihren Abscissendifferenzen, und die Randfläche derselben gehöret zu der Oberfläche der Halbkugel. Eine solche Randfläche auf der Halbkugel, wenn der körperliche Streifen von unendlich kleiner Höhe ist, (das ist, wenn man den Bogen zwischen den Semiordinaten als eine gerade Linie ansehn darf,) gleicht der Oberfläche eines abgekürzten Kegels.

No. 3.) Nun sey der Bogen hd, (weil ich ihn unendlich klein annehme,) eine gerade Linie, und folglich die Seite des erwähnten abgekürzten Kegels. So ist, (§. 93.) wenn sich der Quadrant ganz herum gedrehet und eine Halbkugel beschrieben hat, die krumme Oberfläche dieses abgekürzten Kegels einem Rechtecke gleich, dessen Grundlinie der Krais πef, und dessen Höhe die gerade Linie (das ist, der unendlich kleine Bogen) hd ist. Denn hd ist seine abgekürzte Seite, und die Ordinate fx ist der mittlere Durchmesser zwischen den Durchmessern gh und cd. Oder in einem formalen Hauptsatze: es heisse die Oberfläche des abgekürzten Kegels λ; so ist $\lambda = (\pi ef)(hd)$.

No. 4.

No. 4.) Man vergesse nicht, daß hd unendlich klein, oder eine gerade Linie ist. Der Bogen ist also seiner Sehne gleich, und hf ist die Hälfte von hd, (§. 31.) weil die Abscissendifferenz lm die Hälfte der Abscissendifferenz ln ist. Daher steht der Halbmesser ku rechtwinkelicht auf hd, (§. 33.). Nun betrachte man die beyden Triangel rwt und mku. (Es ist aber tr der Abscissenlinie parallel.) Der Winkel r = m als rechte Winkel; und t = u, weil ein jeder, abbiret zu w, einen rechten Winkel hält; also w = k. Daher tr : tw = um : uk. Oder in Worten: die halbe Höhe dieses abgekürzten Kegels verhält sich zur halben Seite desselben, wie sein halber mittlere Durchmesser zu dem Halbmesser der Kugel. Also ist auch Proportion zwischen der ganzen Höhe (dieses abgekürzten Kegels) zwischen seiner ganzen Seite, zwischen seinem ganzen mittleren Durchmesser, und zwischen dem ganzen Durchmesser der Kugel. Oder (weil ln = 2tr); so ist ln : hd = fe : ab. Folglich ist (ab)(ln) = (ef)(hd.) Also ist die Oberfläche des abgekürzten Kegels, oder λ, (welches war No. 3. = (πef)(hd;) ich sage, es ist λ = (πab)(ln) oder ein Rechteck, dessen Grundlinie der größte Kugelkreis, und dessen Höhe die Höhe des abgekürzten Kegels ist. Es kömmt aber diese Höhe überein mit der Höhe eines körperlichen Streifens oder seines Randes in der Halbkugel.

Digitized by Google

Nr. 5.) Nun theile man die Oberfläche der Halbkugel in lauter solche Streifen von unendlich kleiner Höhe, oder in Oberflächen von unendlich vielen, aber unendlich niedrigen abgekürzten Kegeln, das ist, in $\lambda + \dot{\lambda} + \ddot{\lambda} + \dddot{\lambda}$, u. s. w. Ein jedes λ ist ein Rechteck, welches durch das Produkt aus dem größten Kugelkraise (§. 77.) oder aus πD und aus der Höhe des Streifens h, oder $\dot{h}$, oder $\ddot{h}$, oder $\dddot{h}$ ausgedrückt wird. Weil nun alle diese Höhen $h + \dot{h} + \ddot{h} + \dddot{h}$ zusammen die Summe der Abscissendifferenzen auf dem Halbmesser ik sind, oder den Halbmesser der Kugel, das ist, $\frac{1}{2} D$ ausmachen: so ist die Oberfläche der Halbkugel, oder $\frac{1}{2} F =$

1) $\lambda = \pi D \times h$
2) $\dot{\lambda} = \pi D \times \dot{h}$
3) $\ddot{\lambda} = \pi D \times \ddot{h}$
4) $\dddot{\lambda} = \pi D \times \dddot{h}$, u. s. w.

$$\frac{1}{2} F = \pi D \times \frac{1}{2} D = \frac{1}{2} \pi D^2$$

$$F = \pi D^2.$$

Oder in Worten: F, die Oberfläche der Kugel, ist gleich dem Rechtecke aus dem größten Kugelkraise, multiplicirt durch den Durchmesser desselben; oder sie enthält (§. 78.) vier Flächen des größten Kugelkraises, oder (§. 93.) die krumme Fläche eines geraden Cylinders, dessen Weite und Höhe (eine jede besonders) dem Durchmesser der

Kugel

Digitized by Google

Kugel gleicher. Eine unmittelbare Folgerung ist, daß jeder Abschnitt der Kugel eine Oberfläche hat, welche durch das Produkt $\pi \cdot Dh$ ausgedrückt wird, wenn man die Höhe h nennet.

§. 95.

No. 1.) Nun wollen wir den körperlichen Inhalt der Kugel, und Anfangs der Halbkugel untersuchen. Man sehe — Fig. 128. — die beyden Quadranten gi und gk in den Quadratflächen gezogen, deren Diagonale oc und hc sind. Anfangs wollen wir uns nur auf der rechten Seite verweilen. Es ist die Linie $ac = ab$ (wegen der conformirten Triangel, (§. 28.) weil $og = gh$ ist. Es ist nach dem Pythagorischen Lehrsatze $(af)^2 + (ac)^2$, (oder $+(ab)^2$) $= (df)^2$, oder weil diese Linie der Halbmesser ist; so wollen wir schreiben, $(af)^2 + (ab)^2 = D:2)^2 = D^2 : 4$. Daher ist auch folgendes wahr: $4(af)^2 + 4(ab)^2 = D^2$. Weiter weil $mf = 2af$, weil $lb = 2ab$; so ist $(mf)^2 + (lb)^2 = D^2$.

No. 2.) Also, sind auch folgende Zirkelflächen gleich, (§. 78.) $\frac{\pi (mf)^2}{4} + \frac{\pi (lb)^2}{4} = \frac{\pi D^2}{4}$.

Wenn nun ik oder oh der Durchmesser einer Halbkugel ist, welche wir nach ihrer Höhe in unendlich viele körperliche Streifen, (zwischen den Ordinaten) aber von unendlich kleiner Höhe gedenken; und wenn oh der Durchmesser in der Grundfläche des Kegels ohc ist: so ist von den vorge-

vorgenommenen drey Zirkelflächen (wenn wir sie bey gleicher unendlich kleiner Höhe in körperliche Streifen verwandeln) die erste, nämlich $\frac{\pi (mf)^2}{4}$ der Streifen der Halbkugel; die andere, nämlich $\frac{\pi (lb)^2}{4}$ ist der Streifen des Kegels; und die letzte, $\frac{\pi D^2}{4}$ ist der Streifen eines Cylinders, dessen Durchmesser der Durchmesser der Kugel, oder D, ist. Die beyden ersten Streifen zusammen sind gleich dem letzten; und alle drey sind von gleicher unendlich kleiner Höhe, und in der Gegend eben derselben Ordinate. In dieser Gegend also ist die Summe des Streifens in der Halbkugel und des Streifens in dem Kegel, dessen Grundfläche mit der Kugel und mit dem Cylinder einerley Durchmesser hat, gleich dem einzigen Streifen des Cylinders. Es gilt aber derselbige Beweis für alle Gegenden aller Ordinaten, von Streifen zu Streifen, von unten bis oben. Es ist die Summe aller Streifen in der Halbkugel und in dem Kegel zusammen genommen gleich, der einzigen Summe der Streifen in dem Cylinder, wenn er (gleichwie die Halbkugel und gleichwie der Kegel) die Höhe $\frac{1}{2}$D hat. Da nun der Kegel (§. 92.) ein Drittheil dieses Cylinders ist: so ist die Halbkugel zwey Drittheil desselben, und die ganze Kugel ist zwey Drittheil desselben Cylinders, wenn seine Höhe verdoppelt wird, oder eines solchen

den Cylinders, dessen Weite sowohl als Höhe, dem Durchmesser D der Kugel gleich ist. Daraus folgt, weil dieser Cylinder (§. 88.) $\pi D^3 : 4$ ist, daß die Kugel sey $\pi D^3 : 6$. Und weil ihre Oberfläche ist πD^2; so ist ihr Inhalt die, durch D : 6, oder durch das Drittel des Halbmessers multiplicirte Oberfläche derselben; oder sie ist (§. 92.) einer Pyramide gleich, deren Grundfläche die Oberfläche der Kugel, und deren Höhe ihr Halbmesser ist. Und endlich, weil jede Kugel $\pi D^3 : 6$ ist; so verhalten sich zwey Kugeln, und zwey beyderseitige gleich benannte Theile derselben, wie die Würfel ihrer Durchmesser. Es ist also die Kugel zum Würfel ihres Durchmessers, wie $(\pi D^3 : 6) : D^3 = \pi : 6 = (3,14) : 6$. Und der Cylinder, dessen Höhe und Weite gleich ist, ist zu dem Würfel seines Durchmessers, wie $= (\pi D^2 : 4) : D^3 = (3,14) : 4 = 785 : 1000$.

§. 96.

Der Ausschnitt einer Zirkelfläche (§. 75 und 76.) ist von der ganzen Fläche allezeit derjenige Theil, welcher ausgedrückt wird durch das Produkt aus der ganzen Fläche und aus dem Bruche, dessen Nenner 360, und dessen Zähler die Anzahl der Grade ist, welche in dem Bogen des Ausschnittes sind. Und wenn dieser Bruch b, die ganze Zirkelfläche aber $\pi D^2 : 4$ heißt; so ist der Ausschnitt der Fläche $b \pi D^2 : 4$. Der auf demselben Flächenausschnitt auf beyden Seiten liegende Kugelausschnitt (§. 85.) ist seinem

seinem Inhalte verhält sich zur ganzen Kugel, wie der Flächenausschnitt zur ganzen Zirkelfläche des Durchmessers. Er ist also, wenn der körperliche Inhalt der Kugel K heißt, bk oder $b\pi D^3 : 6$. (§. 95.) Eben so berechnet man die Oberfläche eines Kugelausschnitts. Die ganze Oberfläche ist (§. 94.) πD^2. Also beträgt die Fläche des Kugelausschnitts $b\pi D^2$. Und wenn nur von der Oberfläche, oder von dem Inhalte eines Ausschnitts der Halbkugel die Rede ist; so muß man auch das erwähnte Maaß der Fläche und des Inhalts von einem Kugelausschnitte halbiren.

§. 97.

Man hat verschiedene auf besondere Art regelmäßige Körper, deren Oberflächen aus einer gewissen Anzahl von Vieleckflächen bestehen, deren Winkelpunkte (§. 88.) allesammt von einem einzigen Mittelpunkt einer Kugel gleich weit entfernt sind. Ein dergleichen Körper ist schon der Würfel, das Tetraedrum, Octaedrum, Dodekaedrum, und das Ikosaedrum. Der Würfel ist bekannt. Der zweyte Körper besteht aus vier, der dritte aus acht, das Ikosaedrum aus zwanzig gleichen und gleichseitigen Triangeln in der Oberfläche. Das Dodekaedrum aber aus zwölf regelmäßigen gleichen Fünfecken. Eine weitläuftige Betrachtung solcher regelmäßigen Körper ist in einem allgemeinen Lehr-Buche überflüßig. Ihre Oberfläche, weil sie aus lauter Ebenen besteht,

Digitized by Google

sehr, ist leicht zu berechnen; und ihr körperlicher Inhalt ist eine Summe so vieler Pyramiden, als der Körper Seitenflächen hat. Die Höhe jeder Pyramide ist die, auf der Grundfläche rechtwinkelicht stehende, bis in den Mittelpunkt der Kugel reichende, Linie, welche aber in einer jeden von diesen Pyramiden gleich ist, und leicht gefunden wird. Denn eine jede von den Oberflächen ist ein Theil von der Grundfläche eines Abschnitts der Kugel, oder von einem Kugel-Durchschnitte, welcher mit der Grundfläche irgend einer (von den erdenklichen) Halbkugeln parallel ist. Daher darf man nur den Mittelpunkt zu irgend einem Paare derer Zirkelkraise suchen, in welchen die gesagten vieleckichten Oberflächen beschrieben werden können. Zwey solcher Mittelpunkte, wenn man rechtwinkelichte Linien darauf stellt, bestimmen durch ihren Durchschnitt den Mittelpunkt der Kugel, und eine jede von ihnen ist die Höhe der gedachten Pyramiden. Daher findet man auch eines solchen Körpers Inhalt auf einmal dadurch, daß man die Summe der ganzen Oberfläche berechnet, und (§. 92.) durch das Dritthel dieser gesagten Höhe multiplicirt.

Aus den genannten Körpern können noch andre gemacht werden, welche gewissermaassen auch regelmäßig sind: wenn man nämlich in einer gewissen Entfernung von den Ecken, und in einem gewissen Winkel, solche Körper durch eine Ebene durchschneidet, und dadurch an den obgenannten Körpern Defecte macht, deren Inhalt man von-

dem

Digitized by Google

dem Inhalte jener subtrahiren muß, um den Inhalt der so gestalteten Körper zu finden.

§. 98.

Wenn zwey Körper in gleich viel Ebenen, oder zum Theil auch in Stücke von einer Zirkelfläche, oder einer andern regelmäßigen krummen Fläche, eingeschlossen sind, wenn die beyderseitigen Flächen paarweise einander ähnlich und in gleichen Flächenwinkeln verbunden sind, (§. 58.) und wenn zwischen jedem Paare harmonischer Flächen, die zwischen denselben Winkeln liegen, ein gleiches Verhältniß herrschet; so sind die beyden Körper einander ähnlich. Es ist z. E. ein Würfel, eine Kugel, eine Halbkugel, ein von seinem Winkel benannter Ausschnitt der Kugel, ein von dem Verhältnisse seiner Höhe zu dem Halbmesser benannter Abschnitt der Kugel, ein jeder dieser Körper, sage ich, ist einem jeden eben so benannten Körper ähnlich.

Es verhalten sich aber ähnliche Körper nach ihrem Inhalte zu einander, wie die Würfel, oder wie die Würfelzahlen zweyer, zwischen harmonischen Winkelpunkten in beyden Körpern liegender Linien. Denn man stelle sich anfangs einen aus lauter gleichen Würfeln bestehenden Körper K vor. Nach den gemachten Bedingungen der Aehnlichkeit zweyer Körper, wird man keinen, dem K ähnlichen, Körper R erdenken können, als nur einen solchen, der

Digitized by Google

der aus eben so vielen, aber solchen Würfeln besteht, die auch allesammt unter einander gleich, und entweder von den Würfeln des K nicht unterschieden, oder durchgängig um gleich viel kleiner oder grösser sind. Diese Körper verhalten sich also zu einander, weil die Anzahl der Würfel gleich ist, wie ein dortiger Würfel zu einem hiesigen. Eine jede dortige Linie aber zwischen zwey bestimmten Winkelpunkten, wird sich zu der hiesigen, mit ihr harmonischen, Linie verhalten, wie die Linienseite eines dortigen Würfels zu der Linienseite eines hiesigen. Wenn nun der Würfel dort W und hier w, ihre Seitenlinien aber L und l heissen; so verhält sich der Körper K zu R; ich sage

$K : R = W : w = L^3 : l^3$. Solche Körper verhalten sich also zu einander, wie die Würfel oder Würfelzahlen einer dortigen und hiesigen harmonischen Linie. Aber wenn man die Würfel klein genug annimmt, so kann man mit Wahrheit denken, daß ein jeder Körper aus Würfeln zusammengesetzt sey, so unregelmäßig er immer seyn mag. Ist also wirkliche Aehnlichkeit zwischen zweyen Körpern; so muß sich auch für sie der gegebene Beweis schicken, daß sie sich wie die Würfelzahlen ihrer harmonischen Linien verhalten.

§. 99.

Aus dieser Lehre lernt man Entwürfe solcher Körper machen, welche auf mancherley Art von andern verschieden

seyn sollen. So bald man z. E. den Inhalt eines Körpers K weiß, kann man einen andern R entwerfen, dessen Inhalt zu dem Inhalte des K ein gegebenes Verhältniß haben, und dessen Gestalt regelmäßig seyn soll, z. E. ein Würfel, ein Prisma, eine Pyramide, ein Cylinder, ein Kegel, eine Kugel, eine Halbkugel, oder ein benannter Ausschnitt derselben. Denn ein jeder dieser genannten Körper, wenn man die Linieneinheit fest setzt, hat ein durch das Produkt gewisser Factoren bestimmtes Maaß. Nun sey M das Maaß des Körpers K. Es sey V das Verhältniß, welches der durch M ausgedrückte Inhalt des Körpers K zu m (das ist, zu dem Inhalte des gesuchten Körpers) haben soll. Alsdann ist $m = M : V$. Nun sey aus der Natur des gesuchten Körpers R bekannt, daß sein Körpermaaß m ein Produkt aus dreyen Factoren, n p q, sey; so ist vorausgesetzt, es sey $n\,p\,q = M : V$. Wird nun vorausgesetzt, wie groß ein jeder von zweyen bestimmten Factoren (entweder n und p, oder n und q oder p und q) seyn solle; so ist der dritte Factor so bestimmt, daß man keine Wahl hat, um das Produkt n p q hervorzubringen. Dieser Fall wäre, wenn der gesuchte Körper R ein rechteckichtes Prisma seyn, und seine Grundfläche eine schon bestimmte Länge und Breite haben sollte. Gesetzt aber, es wäre zwar die Grundfläche, aber nicht die Form derselben, bestimmt; so würde man mancherley Wahl haben; und eine noch vielfältigere, wenn auch die Grösse der Grundfläche nicht bestimmt wäre; noch mehr endlich, wenn man

nicht

nicht ein ausdrücklich rechteckichtes, sondern überhaupt nur ein vierseitiges, Prisma verlangte, u. s. w. Denn die allgemeine Regel ist diese von Verwandlung der Körper: Wenn ihr einen Körper von gewisser Form, in einem verlangten Verhältnisse zu einem gemessenen Körper von andrer Form, machen sollet: so sucht 1) die Zahl (M : V). Diese ist m, oder der Ausdruck des Inhalts von dem verlangten Körper. Sucht 2) die Factoren dieser Zahl, welche aus der Natur des verlangten Körpers folgen, z. E. die Factoren npq, wobey es oft geschicht, daß zwey derselben einander gleich seyn müssen. 3) Ist von diesen Factoren keiner bestimmt; so bestimmt ihr sie nach Gefallen oder Absicht. Nur daß ihr Produkt der Zahl M : V gleich werde. 4.) Ist das Produkt zweyer Factoren bestimmt; so dividirt die Zahl M : V durch dies gegebene Produkt, um den dritten Factor zu finden. Die beyden Factoren des gegebenen Produkts aber stehen in eurer Wahl, bis ihr einen derselben bestimmt habet. 5) Ist aber nur ein Factor vorgeschrieben, so findet ihr das Produkt der übrigen, wenn ihr M : V durch den gegebenen Factor dividiret.

Es sey folgendes Exempel, und die Linieneinheit ein Fuß. Der Körper K sey ein durch einen Bogen von 40 Grad bestimmter Ausschnitt einer Halbkugel, deren Durchmesser 36 Fuß ist. Aus der Materie des K sollen zwey Prismata werden, eines am Inhalte doppelt so groß, als das

Digitized by Google

andres, beyde aber einander ähnlich, und von einer solchen Grundfläche, die ein rechtwinkelichter und gleichschenkelichter Triangel ist. Des grössern Triangels Hypothenuse soll seyn 8 Fuß. Hier ist erstnöthig, den Inhalt des Ausschnitts zu berechnen, (§. 96.). (Ich will (§. 77.) π einmal für $3\frac{1}{7}$ annehmen; und überhaupt mich um kleine Brüche nicht bekümmern.) Alsdann ist M, oder dieser Inhalt, $\frac{2}{360}$, oder $\frac{1}{9}$ von der Halbkugel, davon die Rede ist, oder $\frac{1}{9}\pi D^3 : 12 = \frac{1}{9} \cdot 3\frac{1}{7} \cdot (36)^3 : 12 = 1357\frac{4}{7}$ Cubikfuß. Nun sey R das gröste verlangte Prisma. Das Verhältniß des berechneten M zu m ist $\frac{3}{2} = V$. Also ist das Körpermaaß des grössern Prisma, oder es ist $m = (M:V) = (1357\frac{4}{7} : \frac{3}{2}) = 905\frac{1}{7}$ Cubikfuß. Dieses Prisma R hat Grundfläche g, und Höhe h, deren Produkt sein Maaß m, oder $905\frac{1}{7}$ ist. Es soll aber g ein rechtwinkelichter und gleichschenkelichter Triangel seyn, dessen Hypothenuse $l = 8$ bestimmt ist. Also ist nach dem Pythagorischen Lehrsatze eine jede der beyden kleinern Seiten oder $s = \sqrt{32}$. Und die ganze Grundfläche oder g ist $= \frac{1}{2}(\sqrt{32})^2 = 16$. Folglich ist die Höhe $h = 905\frac{1}{7} : 16 = 56\frac{9}{7}$. Nun weiß man also beyde kleine Seiten des rechten Winkels, ihr Product, folglich auch die Grundfläche, und auch die Höhe des Prisma R. Nämlich $s = \sqrt{32} = 5\frac{8}{25}$, die kleine Seite,

$l = 8$, die Hypothenuse,
$h = 56\frac{4}{7}$, die Höhe.

Nun soll diesem Prisma R noch ein ähnliches P gesucht werden, dessen Inhalt m halb so viel beträgt,

trägt, und dessen kleine Seite ich s; dessen Hypothenuse ich l, und dessen Höhe ich h nennen will. (§. 98.) Es ist

$$m : m = 2 : 1 = l^3 : l^3 = s^3 : s^3 = h^3 : h^3$$

Also $\sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{1} = l : l = s : s = h : h = 1\frac{1}{5}\frac{3}{0} : 1$

Also $s = s : 1\frac{1}{5}\frac{3}{0} = s \times \frac{5}{6}\frac{0}{5} = 5\frac{8}{1}\frac{2}{2}\frac{5}{5} \times \frac{5}{6}\frac{0}{3} = 4\frac{2}{4}\frac{2}{3}$.

Und $h = h \times \frac{5}{6}\frac{0}{3} = 56\frac{4}{7} \times \frac{5}{6}\frac{0}{3} = 44\frac{4}{9}\frac{4}{9}$.

Folglich der Inhalt M des Ausschnitts K $= 1357\frac{5}{7}$.

Der Inhalt m des Prisma R $= 905\frac{5}{7}$

Der Inhalt m des Prisma P $= 452\frac{4}{7}$ | $1357\frac{5}{7}$.

Nach der Rechnung aus $(s^2 : 2)\,h$ kömmt zwar ein etwas kleinerer Bruch, als $\frac{4}{7}$. Aber dies ist unvermeidlich, weil sich $\sqrt[3]{2}$ nicht genau angeben läßt.

IX.

Umständlichere Betrachtung der Kugel.

§. 100.

Unter Kugelscheiben verstehe ich allemal die Flächen der Halbkugeln; unter Kugelkraisen aber ihre Umkraise, welche (§. 86.) größte Kraise sind. Halbscheiben nenne ich halbe Kugelscheiben, oder die durch den Durchmesser abgeson-

Digitized by Google

derten Hälften einer Kugelscheibe. Ein Kugelbogen ist mir allemal ein Bogen des größten Kraises. Wenn ich aber von kleinern Scheiben der Abschnitte, von ihren Kraisen und Bogen rede, will ich es ausdrücklich erwähnen.

Ich nenne die sphärische Distanz eines Punktes von dem andern auf der Oberfläche der Kugel, den Kugelbogen zwischen beyden Punkten.

Die Distanz eines Punktes auf der Kugel von einem darauf befindlichen Kraise, ist seine sphärische Distanz von dem ihm nächsten Punkte des Kraises.

Gegenpunkte auf der Kugel, (und überhaupt jedes Kraises,) nennt man die Endpunkte eben desselben Durchmessers der Kugel, (oder überhaupt eines Kraises).

Die Axe einer Kugel ist einer der Durchmesser, um welchen man die Kugel beweglich denkt. Die beyden Gegenpunkte der Kugelaxe heissen Kugelpole.

Aber der Pol eines auf der Oberfläche der Kugel befindlichen Kraises ist ein Punkt, dessen Distanz von jedem Punkte des Kraises gleich ist. Dieser Polpunkt ist allemal ein Endpunkt eines Durchmessers der Kugel, dessen Gegenpunkt der andre Pol desselben Kraises genannt wird. Der Durchmesser, an dessen Endpunkten die Pole

eines

eines Kraises sind, wird auch die Axe eines Kraises genannt.

Daß aber ein Punkt t eines auf der Kugel befindlichen Kraises Pol sey, läßt sich schon daraus schliessen, wenn er in der Mitte des Kugelbogens liegt, welcher von einem Punkte des Kraises nach dem Gegenpunkte desselben gehet. Denn — Fig. 129. — es sey D d die Sehne des Kugelbogens d t D, und c die Mitte derselben Sehne, und t die Mitte des Kugelbogens; so ist, weil D t = d t; und D c = d c, die Linie t c rechtwinkelicht auf D d. Alsdann ist t c ein Theil eines Durchmessers der Kugel, folglich rechtwinkelicht auf allen Durchmessern des Kraises, welche zugleich Sehnen gleich grosser Kugelbogen sind. Denn der Krais oder seine Scheibe ist eine Grundfläche eines geraden Kegels, dessen Spitze t ist, weil er rechtwinkelicht durch den Mittelpunkt geht. Daher ist aus jedem Punkte des Kraises bis in t ein gleicher Kugelbogen; oder t ist der Pol des Kraises; woraus folgt, daß der Gegenpunkt des t auf der Kugelfläche der andre Pol des Kraises sey.

Zweyer sich schneidenden Halbkraise — Fig. 130. — Distanzpunkte D und d, nenne ich in einem jeden Kraise denjenigen Punkt, dessen Distanz von jedem Punkte des Durchschnitts ein Quadrant ist. Ihre Distanz, folglich den Kugelbogen D d, nenne ich auch die Distanz der sich schneidenden Halbkraise.

Parallelkraise auf der Oberfläche der Kugel sind die Umkraise paralleler Flächen in der Kugel.

Ein Kugelausschnitt liegt (§. 86.) zwischen zwey sich schneidenden Halbscheiben. Die Fläche — Fig. 130. — zwischen dem Mittelpunkte c und den Distanzpunkten D und d, theilet den Kugelausschnitt in zwey Halbkugel-Ausschnitte.

Rechtwinkelicht schneiden sich zwey Kraise auf der Kugel, wenn die durch sie umgränzten Flächen (§. 58.) rechtwinkelicht auf einander stehen; folglich schneiden sich Halbkraise rechtwinkelicht, wenn ihre Distanz, (— Fig. 130. —) der Bogen Dd, ein Quadrant ist; denn alsdann ist Dcd ein rechter Winkel.

§. 101.

Ein Kugelkrais gehet durch beyde Gegenpunkte eines jeden von seinen Durchmessern. Daher, wenn zwey Kugelkraise sich schneiden, ist ein Durchschnitt an beyden Gegenpunkten ihres gemeinschaftlichen Durchmessers. Und wenn ein Krais k einen Kugelkrais in zwey Gegenpunkten schneidet; so ist k auch ein Kugelkrais, weil er mit einem Kugelkraise, folglich mit der Kugel, einen gemeinschaftlichen Durchmesser hat.

Eines Kugelkraises Distanz von seinem Pole ist allemal ein Quadrant. Denn man denke seine Scheibe — Fig. 131. — und einen rechtwinkelicht auf ihr stehenden Halbmesser der Kugel,

Digitized by Google

Kugel, welcher cp heissen mag. Wenn nun die Punkte des Kraises m, m, m, heissen; so werden aus pcm, pcm, pcm lauter gleiche, bey c rechtwinkelichte Dreyecke. Es sind also pm, pm, pm gleiche Sehnen rechter Winkel; also sind ihre Bogen Quadranten, da beyde kleine Seiten dieser Triangel allesamm Halbmesser sind. Wenn ein Quadrant von dem Pole eines Kraises bis in den Krais geht; so ist der Krais ein Kugelkrais. Denn alsdann sind pc, cm, cm, (u. s. w.) Durchmesser der Kugel.

Wenn ein Kugelkrais a durch die Pole des Kugelkraises b gehet; so gehet auch b durch die Pole des a, und so schneiden sich beyde (oder ihre Scheiben) rechtwinkelicht. Es sey — Fig. 130. — D der Pol des Halbkraises rdr; so ist Dr ein Quadrant. Es sey auch dr ein Quadrant. Es muß Dd ein Quadrant seyn, weil D der Pol des andern Kraises ist. Also ist d der Pol des Kraises rDr. (§. 100.) Weil nun Dd, folglich die Distanz der beyden Halbkraise, ein Quadrant ist; so ist der Durchschnitt rechtwinkelicht. (§. 100.) Und wird vorausgesetzt, daß sie sich rechtwinkelicht schneiden; so folgt, daß diese Distanz der Halbkraise von 90 Grad, folglich, daß jeder Distanzpunkt ein Pol des andern Kraises sey. Wenn aber ein Kugelkrais durch einen Pol des andern geht, so geht er auch durch den Gegenpol desselben.

Wenn von dreyen Kugelkraisen die beyden ersten, a und b, sich in den Polen des c schneiden; so geht c durch beyde Pole des a und auch des b. Dieser doppelte Satz ist nur gweymal der vorige.

§. 102.

Auf dem Mittelpunkte einer kleinern Scheibe, oder der Fläche eines kleinern Kraises, steht der Halbmesser der Kugel rechtwinkelicht. Denn (§. 86.) diese Fläche ist die Grundfläche eines geraden Kegels, dessen Spitze an dem Mittelpunkte der Kugel ist. (§. 84.) Also (umgekehrt) derjenige Punkt der Scheibe, worauf ein Halbmesser der Kugel rechtwinkelicht steht, ist der Mittelpunkt der kleinern Scheibe und ihres Kraises.

Alle Kraise auf der Kugelfläche, welche von dem Mittelpunkte der Kugel gleich weit entfernt sind, sind unter einander sowohl gleich, als ihre Scheiben unter einander. Man denke sie als Grundflächen gleicher gerader Kegel.

Die kleinere Scheibe und ihr Krais ist von dem Mittelpunkte der Kugel weiter entfernt, als die grössere Scheibe mit ihrem Kraise. (— Fig. 132. — Wenn der Durchmesser der grössern Scheibe unten heisse Dd, ihr Mittelpunkt m; der kleinern Scheibe Durchmesser sey Ee, ihr Mittelpunkt n. Der Mittelpunkt der Kugel

Kugel aber c. Auf der ersten Scheibe steht cm, auf der andern ct, rechtwinkelicht. Der Triangel mDc ist bey m, der Triangel trc ist bey t rechtwinkelicht. Die Grundlinie auf jener Scheibe ist grösser, als die auf dieser; und doch haben sie beyde einerley Hypothenuse, weil sowohl Dc als rc Halbmesser der Kugel sind; also muß mc, oder die Entfernung der grössern Scheibe von dem Mittelpunkte der Kugel, kleiner seyn, als tc, die Entfernung der letztern von c, weil nach dem pythagorischen Satze, die Summe der Quadrate der beyden kleinen Seiten, in jedem dieser Triangel dem Quadrate des Halbmessers der Kugel gleich seyn muß. Ich sage $(mc)^2+(mD)^2=(Dc)^2=(er)^2=(ct)^2+(er)^2$. Nun ist dort die Grundlinie Dm grösser, als hier er, folglich muß die dortige Seite mc kleiner seyn, als die hiesige tc.

Wenn ein Kugelkrais — Fig. 132. — einen kleinern, in zwey Gegenpunkten desselben, d und D, schneidet; so ist der Durchschnitt rechtwinkelicht, und so geht der Kugelkrais durch die Pole des kleinen. Denn der Durchmesser des kleinern ist alsdann Dd. Und eben dieser Durchmesser ist eine Sehne des Bogens Dd, eines Theiles von dem Kugelkraise. Auf der Mitte dieser Sehne Dd, oder auf dem Punkt derselben, welcher zugleich der Mittelpunkt des kleinern Kraises ist, steht der Durchmesser des Kugelkraises ec rechtwinkelicht. Also sind (wenn man Sehnen zieht) emD und emd gleiche Triangel, folglich die Seiten ed und eD

gleiche

gleiche Sehnen des Kugelkraises. Daher sind von e die beyden Punkte d und D des kleinern Kraises gleich weit entfernt, und der Punkt e, durch welchen der Kugelkrais geht, ist daher ein Pol des kleinern Kraises. Man sieht aber durch einen ähnlichen Beweis, daß der Gegenpunkt des e der andre Pol des kleinern Kraises, und daß der Durchschnitt rechtwinkelicht sey. Denn man setze noch einen andern Durchmesser des kleinern Kraises; so kann man, da nun e als ein Pol des kleinen Kraises bekannt ist, aus Triangeln wieder beweisen, daß bey m rechte Winkel sind, und daß folglich em rechtwinkelicht auf der Fläche des kleinern Kraises stehe. (§. 55.) Es ist aber em in der Ebene des Kugelkraises. Daher schneiden sich beyde Ebenen, folglich beyde Kraise, rechtwinkelicht. (§. 58.) Eben so kann man rückwärts schliessen, daß, wenn der Kugelkrais durch die Pole des kleinern geht, der Durchschnitt rechtwinkelicht sey, und durch zwey Gegenpunkte des kleinern Kraises geschehe.

§. 103.

Der Durchmesser Pp (— Fig. 133. —) geht durch die Mittelpunkte aller Scheiben der Kraise rq, ab, MN, tu, (u. s. w.) rechtwinkelicht auf allen Scheiben durch. Darum sind diese Scheiben als Flächen parallel. Ihre Kraise sind auch parallel. Denn sind zwey einander gleich, wie rq und tu; so sind sie 2 Kraise der beyden Grundflächen desselben Cylinders. Sind sie ungleich, wie

wie rqand MN; so ist der grösste in der Grundfläche, aber der kleinste in dem parallelen Durchschnitte eines Kegels. (§. 87.)

Von folgenden Sätzen läßt sich alles jeder aus jedem schliessen. 1) Die Kraise auf der Kugel sind parallel. 2) Ihre Scheiben sind parallel. 3) Ein Durchmesser geht durch alle Mittelpunkte auf jeder Scheibe rechtwinkelicht. 4) Sie haben einerley Pole und Axe. 5) Es liegt zwischen ihnen, an beyden Seiten, ein gleicher Bogen desselben Kugelkraises, welcher sie beyde schneidet. 6) Ihre Bogen, welche zwischen denjenigen Paare der sie schneidenden Kugelkraise unter einander liegen, sind parallel und ähnlich, (das ist, von gleich viel Grad, aber ein jeder nach seinem Durchmesser,) u. s. w. Der Beweis ist weitläuftig, und doch überflüssig, weil er aus den Begriffen (§. 100.) und aus der gewöhnlichsten Anwendung der Triangelehre fließt.

Ein kleiner Krais auf der Kugel, wie ab oder rq, hat seine Pole P und p nicht um einen Quadranten, sondern den einen mehr, den andern weniger von sich entfernt. Auch dieses fällt als offenbar in die Augen.

§. 104.

No. 1.) **Vorbereitung.** Man ziehe (— Fig. 134. —) 2 krumme Linien, die beyde sich von derselben geraden Linie anfangs entfernen, hernach sich wieder nähern, und in den Endpunkten dieser

dieser Linie und ihre gemeinschaftlichen Endpunkte haben. Die krumme Linie mdn ist die einschlüssende, men die eingeschlossne. Jene muß gröſſer seyn, als diese. Beweis. Man ziehe qn. men. unendlich kleine Sehnen, die der krummen Linie gleich geschätzt werden dürfen. Auf mp stehe rechtwinkelicht pr; auf pq rechtwinkelicht sowohl ps, als qt; auf qn rechtwinkelicht qu; (u. s. w.) so ist

mr > mp, jene als eine krumme Diagonale.
st > pq, (oder, wegen des Parallelismi zwischen ps und qt, doch nicht kleiner.)
un > qn, (jene als eine krumme Diagonale.)

mr + st + un > mp + pq + qn. Also
mr(+rs)+st(+tu)+un > mp+pq+qn.
Also ist die krumme Linie mdn gröſſer, als men.

No. 2.) Vorbereitung. Es sey (—Fig. 135.—) dgf ein Bogen eines gröſſern Zirkelkraises; dkf ein Bogen eines kleinern Zirkelkraises, welcher den gröſſern in den Punkten d und f schneidet. Es sey df die gemeinschaftliche Sehne eines Bogens von dem gröſſern, und eines Bogens von dem kleinern, die (jeder) unter 180 Grad sind, und noch angesetzt werden müssen, um die Kraise zu ergänzen. Zur Erleichterung der Einbildungskraft kann man sich vorstellen, daß beyde Kraise in derselben Ebene sind. Es sey c in der Mitte der Sehne. Der Mittelpunkt des gröſſern Kraises M ist von der Sehne df, also von c weiter entfernt, als der Mittelpunkt des klei-

Digitized by Google

kleinern m, weil mf < Mf, und weil (fe)² + (em)² = (mf)², und weil (ef)² + (eM)² = (Mf)². Also ist Me > mc. Aber (§. 44.)

Mc : ef = r : tan M

mc : ef = r : tan m

Also Mc : mc = tan m : tan M, Oder der Winkel M < m. Nun nenne man auf der Linie gh, den Punkt, der den aus M (auf dieser gh) gezognen Durchmesser des gröſsern Kraises endigt, E; und e den Punkt, der den kleinern Durchmesser, von m aus, endigt. Der Triangel EfM ist bey E und f gleichwinkelicht; der Triangel efm ist bey e und f gleichwinkelicht, weil EM und fM Halbmesser des gröſsern Kraises, em aber und fm Halbmesser des kleinern Kraises sind. Aber der Winkel m ist schon für gröſser bekannt, als M. Daher ist der Winkel E ein gröſser Complement, als e. Nun vergleiche man die Triangel Efc und efc, die bey c rechtwinkelicht sind. Des ersten Triangels Winkel bey f heiſse f, des andern aber f. Es ist das Complement f < f. Daher (§. 44.)

fc : cE = r : tan f

fc : ce = r : tan f

ce : cE = tan f : tan f

Oder ce > cE.

Es ist aber cE die Höhe des Abschnitts von dem gröſsern, ce aber die Höhe des Abschnitts von dem kleinern Zirkelkraise. Die erste ist kleiner als

die

kleinere; folglich wird der Bogen AE (über derselben Sehne) eingeschlossen, von dem Bogen (des kleinern Zirkels) AE. Der Bogen des kleinen ist nach (No. 1.) also gröſſer. Dasselbe aber würde, wegen der Allgemeinheit des Beweises, auch Statt finden, wenn auch die beyden Zirkel nicht in einer Fläche lägen, wenn nur der kleinere den gröſſern in 2 Punkten schneidet. In allen solchen Fällen ist der abgeschnittne Bogen des kleinern Zirkels, der durch die gemeinschaftliche Sehne abgeschnitten wird, eine gröſſere Linie, als der abgeschnittne Bogen des gröſſern Zirkels.

3) Daher ist auf der Kugelfläche der Kugelbogen, oder die sphärische Distanz, die kürzeste Linie von einem Punkte zum andern. Denn der Kugelbogen ist ein Abschnitt eines Kugelkraises; alle andre Wege aber von einem Punkte zum andern sind Abschnitte kleinerer Kraise, (No. 2.) die den grossen Kugelkrais bey denen Punkten, von deren Distanz die Rede ist, schneiden. Diese Abschnitte der kleinern Kraise aber sind gröſſer.

§. 105.

Die sich schneidenden Kugelbogen haben in dem Punkte des Durchschnitts eine gewisse Lage gegen einander; wodurch zugleich der Flächenwinkel bestimmt wird, in welchem ihre Scheiben sich schneiden, oder an einander stossen; und wodurch gleichfalls der Winkel bestimmt wird, in welchem die

die beyden Tangenten der Kugel in dem Punkte des Durchschnitts, auf der daselbst die Kugel berührenden Ebene sich scheiden, oder auf einander stossen. Diese Lage zweyer sich schneidenden, oder zusammenstossenden Kugelbogen; das ist der Flächenwinkel zusammenstossender Kugelscheiben; oder der Winkel zusammenstossender Tangenten, (denn alles ist einerley) heißt ein Sphärenwinkel.

Wenn 2 Kugelkreise sich schneiden, so entstehen zweymal 4 Sphärenwinkel. (in Fig. 186. n. 4.) Nämlich A durch den Zusammenstoß der Kugelbogen dm und gm; und B durch die Kugelbogen gm und fm; und a durch die Kugelbogen fm und em; und b durch die Kugelbogen em und dm. An dem Gegenpunkte des Punkts m auf der Kugel sind alsdann auch 4 Winkel, welche mit jenen, (wie ich beweisen werde,) paarweise gleich sind.

Man denke den Punkt m, den Endpunkt des Durchmessers, als eine kleine, die Kugel daselbst berührende Fläche; und auf derselben den Durchschnitt der Tangenten der beyden Kreise: so wird man nicht zweifeln, daß paarweise A und B; auch B und a; auch a und b, auch b und A Nebenwinkel sind, deren jedes Paar 180 Grad hält; und daß A = a und B = b, als Verticalwinkel; und daß die Summe aller vier, A + B + a + b, zusammen 360 Grad halten.

Folglich sind die Winkel an den 4 Gegenpunkte des unbestimmten Winkels, welche durch den Durchschnitt derselben Kugelkraise verursacht werden, den 4 ersteren gleich. Dieses folgt nämlich aus dem Parallelismus der beyden Tangenten an 2 Gegenpunkten eines und desselben Kraises, und (§. 56.) aus der Gleichheit paralleler Winkel. Daher sind die Winkel an den 2 Gegenpunkten zweyer zusammenstossender Halbscheiben, sich allemal gleich, als welches auch schon daraus folgt, weil der Flächenwinkel zweyer zusammenstossender Flächen in allen Punkten des Durchschnitts gleich bleibet.

Dieselben Halbkraise, oder Halbscheiben, welche allemal an den Gegenpunkten, oder Schneidepunkten, 2 gleiche Winkel machen, sind die Seiten eines Kugelausschnitts (§. 100.), Und — Fig. 130. — der Winkel Ded, (oder sein Bogen, der die Distanz der beyden Halbkraise anzeigt, und dessen Fläche die Halbkugelausschnitte von einander sondere,) ist das Maaß jedes der beyden Winkel. Daher, wenn Ded ein rechter Winkel, oder sein Bogen ein Quadrant ist: so ist der Sphärenwinkel bey r sowohl als bey r, ein rechter Winkel.

§. 106.

Wenn nun zwey an einander stossende halbe Kugelkraise beyde von dem Bogen eines dritten Kugelkraises durchschnitten werden; so sind (— Fig. 137. —) a, b, c, e, nebst r und r, auch Sphärenwinkel. Nun heißt

heißt ein Sphärenzweyeck, die Figur eines solchen zwey sphärischen Winkeln und ihren Seiten oder Schenkeln eingeschlossenen Theils der sphärischen Oberfläche. Also sind Drd und Drd zwey sphärische Triangel; die Seiten des ersten sind die Bogen Dr, rd, dD; des andern aber die Bogen Dr, rd, dD; und wenn r, folglich auch r, ein rechter Winkel ist; so sind beyde Triangel rechtwinkelicht. Sie würden schiefwinkelicht heissen, wenn keiner von ihren Winkeln ein rechter wäre.

Man sieht unmittelbar, daß keine Seite eines sphärischen Triangels, so groß, als ein Bogen von 90 Grad, oder als ein Halbkrais seyn; auch daß kein sphärischer Winkel bis völlig an 180 Grad, oder bis an die Summe zweyer rechten Winkel kommen könne. Jede Seite ist ein Bogen, und jeder Winkel ein Winkel unter 180 Grad.

Die Seiten eines sphärischen Triangels sind Kugelbogen, und jeder Kugelbogen ist die Gränze von einem Theile einer Kugelscheibe, welcher ein Triangel mit einer krummen Grundlinie ist, und seine Spitze am Mittelpunkte der Kugel hat. Bey jedem sphärischen Dreyecke kann man 3 solche triangelförmige Scheibenstücke denken, welche zwey und zwey durch Flächenwinkel (also durch 3) verbunden sind, ihre gemeinschaftliche Spitze, (wie die Seiten einer Pyramide,) an dem Mittelpunkte der Kugel haben, und also ein dreyseitiges Körpereck umgeben, dessen Oeffnung oder Decke die

sphärische Triangelfläche ist. Die Flächenwinkel dieses Körpertheils sind die Winkel des sphärischen Triangels.

Auch in einem sphärischen Triangel ist die Summe zweyer Seiten grösser, als die dritte Seite. Denn (— Fig. 143. —) der Triangel sey abc. Man mache aus ac einen ganzen Krais, dessen Durchmesser af ist. Man mache ad = ab, und ziehe die Sehne dc, welche den Durchmesser in e schneidet. Auch ziehe man die Sehne bc. Hierauf führe man den Bogen ad um die Are af so herum, daß er in die Stelle von ab kömmt. Alsdann ist de = be. Folglich be + ec = dc. Weil nun be + ec grösser sind als bc; so ist auch dc grösser, folglich ist auch die Sehne der summirten Bogen, oder der zwey Seiten, grösser als die Sehne der Seite bc. Daher sind auch die Bogen ac + ab zusammen grösser, als den Bogen oder die Seite bc.

Alle drey Seiten eines sphärischen Triangels sind zusammen niemals so groß, als der ganze Kugelkrais. Denn man verlängere die Schenkel eines der Winkel, bis sie Halbkraise werden und zusammen stossen; so macht die diesem Winkel gegen überstehende Seite, mit den beyden Zusätzen, einen sphärischen Triangel. Daher ist die dritte Seite nicht so groß, als das, was zu den beyden übrigen Seiten, um zwey Halbmesser zu werden, noch hinzu kommen muß. Es stehe auch die grössere Seite dem grössern, und die kleinere Seite dem kleinern Winkel gegenüber. Denn (— Fig. 144. —) es sey k klei-

kleiner als g; so mache man l dem k gleich. Alsdann ist kn = ln, (wegen der gleichen Sehnen.) Also, wenn g grösser ist, als k; so ist gn + nm grösser, als gm. Folglich ist auch km grösser.

Der sphärische Triangel ist ebensowohl, als ein ebener, erstlich durch 2 Seiten und einen eingeschloßnen Winkel, oder zweytens durch eine Seite, und durch die Winkel an deren Endpunkte völlig bestimmt. Denn die zusammenstossenden Bogen haben Sehnen. Im ersten Falle also ist die Länge und Lage zweyer zusammenstossenden Sehnen, im zweyten aber eine Sehne und die Lage zweyer andern, (an derselben,) die in eine Spitze zusammen laufen müssen, bestimmt. Wüßte man auf eine leichte Art aus dem Tangentenwinkel zusammenstossender Bogen, und aus ihrer Länge, die Lage und Länge der Sehnen zu finden; so könnte man jeden sphärischen Triangel ohne Schwierigkeit in einen ebenen verwandeln. Aber nun bedarf man andrer Regeln.

§. 167.

Und zwar zuerst von rechtwinklichten sphärischen Triangeln. Wir wollen uns dazu vorbereiten. 1) Ich nenne den Bogen, welcher die Seite eines Triangels ist, wenn er 90 Grad hält, quadrantisch; überquadrantisch, wenn er grösser; unterquadrantisch, wenn er kleiner ist. Diese Ausdrücke sind mir bequem. Anstatt der Seiten oder Bogen aber will ich oft der Scheibenstücke (§. 108.) erwähnen, deren Bo-

Digitized by Google

gen sie sind. Auch diese nenne ich, nach der Grösse ihrer Bogen, bald quadrantisch, bald überquadrantisch, bald unterquadrantisch.

2) In einem rechtwinkelichten Triangel, (denn er hat wenigstens einen rechten Winkel,) stehen von den drey Scheibenstücken wenigstens zwey, Seiten oder Scheibenstücke rechtwinkelicht, aufeinander. Eine davon heisse die Grundseite G, die andre die Höhenseite H, die dritte aber, welche dem rechten Winkel gegenüber steht, heisse R; die gegenüber stehenden Winkel will ich allezeit durch die kleinen Buchstaben g, h und r, bezeichnen; und übrigens durch das Punktiren der Buchstaben, wie ich schon gewohnt bin, das Aehnliche, was doch im gewissen Verstande unterschieden ist, unterscheiden. Man sehe — Fig. 138. — und wiederhole den Text; so wird alles deutlich. Die Seiten des Triangels zur Rechten sind eigentlich die Bogen rh, rg und gh; aber die erste nenne ich auch das Scheibenstück G, die andre das Scheibenstück H, die dritte das Scheibenstück R. An der linken ist auch ein rechtwinkelichter Triangel, mit den Seiten Ġ, Ḣ, Ṙ, oder ṙḣ, ṙġ und ġḣ, und den Winkeln g, h, r.

3) Zwischen 2 Punkten, einem aus dem Hohlkreise rDr, dem andern aus rdr, (welche sich rechtwinkelicht schneiden,) ist die Distanz 1.) quadrantisch, wenn einer der Punkte d oder D ist, welcher von e und einem einzigen Quadranten entfernt sind, wovon folglich (§. 102.) ein jeder der

Pol

Pol des andern Kraises ist. 2) Unterquadrantisch, wenn die Punkte an derselben Seite des Bogens Dd liegen, wie die Punkte g und h. Denn man denke eine dritte Halbscheibe rechtwinkelicht auf GG, von welcher die Halbscheibe HH, im Durchschnitte Dc, so durchschnitten wird, daß die Linie hc bey c rechtwinkelicht daran stößt. Diese fingirte Halbscheibe, die ich f nennen will, nimmt ihren Anfang in einem Punkte des Bogens dr an der linken Seite auf der Grundfläche, geht durch D und so weiter jenseits der Höhenfläche HH. Diese erdichtete Halbscheibe f, deren jenseit der Halbscheibe HH liegende Punkte ich p, p, p, u. s. w. nenne, hat einen ihrer Pole in dem Punkte h auf der Grundfläche, weil der Bogen hD ein Quadrant ist, und das Scheibenstück hcD rechtwinkelicht an f stößt. (§. 57, 58, 101.) Also ist von h nach p, p, p, u. s. w. also auch nach dem p, (hinter der Höhenfläche H,) nach welchem der Weg über g gehet, ein Quadrant. Daher ist der Bogen gh unterquadrantisch. 3) Wenn aber ein Punkt jenseits, ein Punkt diesseits des Bogens Dd liegt; so ist die Distanz derselben überquadrantisch, wie etwa die Distanz zwischen den beyden Halbkraisen h nach m. Denn da von dem Pole h allenthalben in den erdichteten Halbkrais f hinein ein Quadrant ist, und der Weg von h, nach m, über den Halbkrais f hinüber geht: so ist die Distanz, oder der Kugelbogen hm, überquadrantisch.

Die rechten Winkel, wie alle als bekannt vorausgesetzt, sind immer r und r. (— Fig. 138. —)

1) Wenn die Hypothenuse, das ist, die Seite R, unterquadrantisch ist; so sind auch die Seiten G und H unterquadrantisch, oder beyde überquadrantisch. Und wenn eine der letzten Bedingungen Statt findet: so ist auch die Seite R unterquadrantisch. Es ist R die Hypothenuse von beyden Triangeln GHR und GHR, (§. 107.) unterquadrantisch. Es sind aber auch in dem ersten Triangel G und H unterquadrantisch, G und H überquadrantisch in dem andern. Und es muß allemal Eins aus dem Andern folgen, wie der Augenschein lehrt.

2) Hingegen folgt auch Eins aus dem Andern, daß die Hypothenuse R überquadrantisch ist, (wie — Fig. 139 —) und daß von den Seiten G und H eine überquadrantisch und eine unterquadrantisch ist. Dies lehrt abermals der Augenschein. In den beyden Triangeln, deren gemeinschaftliche Hypothenuse R ist, was den ersten betrifft, ist G unterquadrantisch, H überquadrantisch; in dem andern Triangel aber G überquadrantisch, und H unterquadrantisch.

3) Wäre aber R quadrantisch, nämlich der Bogen Dd, oder Dp, oder Dp̄, oder die Scheibenstücke Dcd, Dcp, Dcp, u. s. w. so könn-

könnten alle 3 Seiten, aber so müssten alsdann nicht 2, quadrantisch seyn; und wenn nur 2 quadrantisch wären; so könnte die dritte entweder unterquadrantisch oder überquadrantisch seyn. Man setze, R sey das Scheibenstück Ded, so sind alle drey Seiten, in den beyden Triangeln links und rechts, quadrantisch. Man setze, R sey das Scheibestück Dcp; so ist, in dem Triangel zur Rechten, R und H quadrantisch, G aber unterquadrantisch; in dem Triangel zur Linken aber R und H quadrantisch, G aber überquadrantisch. Folglich, wenn der Winkel zwischen der Hypothenuse und Grundfläche ein rechter Winkel ist; so ist auch die Höhenseite (oder das Perpendikel) ein Quadrant. Ist jener Winkel spitzig; so ist die Höhenseite unterquadrantisch. Ist er stumpf; so ist die Höhenseite überquadrantisch. Denn im ersten Falle geht die Hypothenuse von dem Punkte D aus. Im zweyten Falle, die Hypothenuse mag unterquadrantisch oder überquadrantisch seyn, (wir betrachten den Triangel, der in der Figur zur Rechten steht) fällt der andre Winkelpunkt zwischen D und r; im dritten Falle zwischen D und r.

§. 109.

Man hat eine in vielerley Wissenschaften unentbehrliche Kunst, (von welcher die Belehrung die sphärische Trigonometrie genannt wird,) wenn man von den 3 Winkeln und 3 Seiten eines sphä-

Digitized by Google

[illegible] Dreyecke, welche die [illegible] bestimmen, nähmlich die [illegible] zu suchen. Die Lehre dieser Kunstgriffe wird nachstehends [illegible] Lehrsätzen, [illegible] anfangs mit solchen Triangeln, die rechtwinklicht sind, [illegible] folglich auch die Hypothenuse (§. 109.) [illegible] ist.

Nehmlich ein solches Triangel sey (§. 107.) ABH — Fig. 140. — unter welchen Buchstaben ich die 3 Seiten des sphärischen Triangels verstehe, oder vielmehr die 3 Scheibenstücke, welche sich in den Seiten des Triangels endigen. Es ist B, die Basis, oder Grundseite, entgegen gesetzt dem Winkel N, und P die Höhenseite, oder das Perpendikel, entgegen gesetzt dem Winkel M; und H, die Hypothenuse, entgegen gesetzt dem rechten Winkel R. Dieser Triangel ist die Figur desjenigen Theils der Kugelfläche, welcher ein pyramidenförmiges dreyseitiges Körpereck endigt, dessen Spitze in C, dem Mittelpunkte der Kugel, ist. Die Winkel des sphärischen Triangels, das ist, die Flächenwinkel N, M, R, bleiben, wie sie sind, wenn wir dies Körpereck vorn bey der Oefnung abkürzen, und einen Rest davon übrig lassen, dessen Oefnung eine geradelinichte Figur erhalten kann. In der Fläche B wähle man (— Fig. 141. —) eine auf MC rechtwinklicht stehende Linie, von MC nach CR, kurz, man wähle MR. In der Linie NC wähle man den Punkt D, der gerade über der Linie MR steht, so daß, wenn man durch das Körpereck von N, nach der Linie MR hin, einen

Durch-

Durchschnitt macht, die Oefnungsfläche NMR rechtwinkelicht auf der Fläche B stehet. Dieser Durchschnitt werde gemacht; so erscheinet (— Fig. 141. —) das geradelinichte Körpereck, dessen Flächenwinkel N, M, R, den Winkeln unsers sphärischen Triangels noch immer gleich sind. Eine jede der drey Flächen B, P, H, endiget sich bey C in einem ebenen Linienwinkel. Diese drey ebnen Winkel will ich durch die Namen der Flächen bezeichnen, auf welchen sie sind. Der eine auf der Basis B heisse B; der auf dem Perpendikel P heisse P; der auf der Hypothenuse H aber heisse H. Wenn wir diese Winkel, B, P, H, wissen; so wissen wir auch die eben so benamten Seiten unsers sphärischen Triangles. Denn die Bogen B, P, H, welche —Fig. 140.— die Seiten desselben sind, sind auch die Bogen dieser ihnen gleich benamten ebnen Winkel.

No. 2.) Die Linie NR stehet auf der Fläche B rechtwinkelicht, (§. 55-60) als ein Durchschnitt zweyer Flächen des Perpendikels P, und der Oefnungsfläche, welche beyde auf B rechtwinkelicht stehen. Demnach ist rechtwinkelicht bey R der Triangel MRC, oder das Perpendikel, und NRM, oder die Oefnungsfläche. Und bey M. sind rechtwinkelicht der Triangel RMC, oder die Basis, und der Triangel NMC auf der Hypothenusenfläche. Denn MC, als rechtwinkelicht auf MR, (das ist, auf dem Durchschnitte der rechtwinkelicht verknüpften Basis und Oefnungsfläche,) ist rechtwinkelicht auf der Oefnungsfläche, folglich auch auf der Linie MN.

No. 3.)

Digitized by Google

No. 3.) Folglich, weil der MC sowohl NM, als RM rechtwinkelicht ist, so ist der Winkel M in der Neigungsfläche, oder Flächenwinkel M in dem Körpereck.

§. 140.

Aus diesen vier Triangeln wollen wir Schlüsse machen, und damit die Flächen und Triangel besser in die Augen fallen, die Neigungsfläche durch Umdrehung um NR in die Perpendikelfläche bringen, und sie O nennen, die Hypotheruſenfläche anfangs durch Umdrehung um CM in die Basisfläche legen, und die so vereinigte Basisfläche und Hypotheruſenfläche durch Umdrehung um CR auch in die Perpendikelfläche bringen. So erscheint — Fig. 143. — die Figur von vier Triangeln, O, P, B, H, die noch die vorigen sind, in eben derselben Fläche.

Alsdann wird man folgende Proportionen wahr finden, worinnen r den Sinus des rechten Winkels bedeutet.

I.) r : cos M = cot B : cot H. Denn in dem Triangel O, hat MN zu MR, das erste Verhältniß, r : cos M; und in den Triangeln H und B, das Verhältniß tan H zu tan B, oder (§. 42.) das zweyte Verhältniß cot B zu cot H.

II.) r : sin H = sin M : sin P. Denn in den Triangeln H und P, (nach dem Halbmesser CN) ist

ist NM : NR = sin H : sin P = (nach dem Triangel O) r : tan M.

III.) r : sin B = cot P : cot M. Denn nach dem Triangel P und dem Halbmesser CR, ist r : CR = tan P : NR = (nach dem Triangel B) sin B : MR. Folglich tan P : sin B = NR : MR = (nach dem Triangel O) tan M : r. Daher r : sin B = tan M : tan P = (§. 40.) cot P : cot M.

Man könnte aber (§. 109.) die Fläche P, als die Basis, und die Fläche B, als das Perpendikel ansehn, eine Linie RN auf CN rechtwinklicht ziehen, und die Oefnungsfläche, deren Spitze alsdann in M wäre, rechtwinkelicht auf der Fläche P in RN setzen. Alsdann müßte von dem Winkel N wahr seyn, was nun von M bewiesen ist; und von dem Winkel P, was nun von B bewiesen ist. Diese Verwechselung dräuche noch zum Beweise künftiger Proportionen.

IV.) r : sin N = cot P : cot M. Denn (nach II.) ist

r : sin H = sin M : sin P. oder

(verwechselt) r : sin H = sin N : sin B

Weil also sin B : sin N = sin P : sin M

(und weil III.) r : sin B = cot P : cot M

(so ist nach Mult.) r : sin N = sin P cot P : sin M cot M

oder r : sin N = r cos P : sin M (§. 42.)

oder r : sin N = cos P : cot M.

V.)

VI.) r : cot M = cot N : cos H. Denn (I. II.)
cot M = cot B : cos H
sin M : sin P = r : sin H } Also (§. 42.)
sin M : cos M sin P = r cot B : r cos H. Folglich
r sin M : cos M sin P = cot B : cos H
(und III. verwechselt)
sin P : r = cot N : cot B. Also
sin M : cos M = cot N : cos H
(Oder, §. 46.) r : cot M = cot N : cos H.

Wir wollen die sechs Proportionen, und noch vier, die aus Verwechslung der vier ersten folgen, zusammen setzen.

I. r : cos M = cot B : cos H
II. r : sin H = sin M : sin P
III. r : sin B = cot P : cot M
IV. r : sin N = cos P : cot M
V. r : cos B = cos P : cos H
VI. r : cot M = cot N : cos H
VII. r : cos N = cot P : cot H
VIII. r : sin H = sin N : sin B
IX. r : sin P = cot B : cot N
X. r : sin M = cos B : cos N

In

In dem sphärischen rechtwinkelichten Triangel, den wir betrachten, sind ausser dem rechten sphärischen Winkel, oder dem Flächenwinkel R, welcher allezeit in unserm Falle vorausgesetzt wird, fünf Dinge, nämlich zwey sphärische Winkel oder Flächenwinkel M, N, und drey Winkel, wozu die Bogen oder die Seiten des Triangels gehören, B, P, H.

Es können nur zehn verschiedene Zusammensetzungen seyn, darinnen drey dieser Dinge unbekannt sind. Also haben wir für jede derselben einen Proportionalsatz. Also, wenn zwey dieser Dinge nebst R bekannt sind, so hat man drey Proportionalsätze, die drey unbekannten Dinge durch Hülfe der bekannten zu finden, wobey man sich der Sinustafeln und Logarithmen bedient.

Bisher ist nur das Mittel gewesen, solche rechtwinkelichte Dreyecke zu berechnen, deren alle Seiten unterquadrantisch sind.

Die übrigen sind von zwey Arten. Die erste Art hat eine unterquadrantische Hypothenuse; aber sowohl ihre Basis, als ihr Perpendikel, ist überquadrantisch. Solche Triangel berechnet man auf folgende Art. Es giebt immer, wenn der Triangel, von welchem wir reden, —Fig. 138.— hrg ist, auf derselben Seite der Halbscheibe, worauf die Basis G liegt ein,

ein gleichfalls rechtwinkelichtes Dreyeck h r g, welches mit jenem die Hypothenuse R gemeinschaftlich hat. Dieses Neben-Dreyeck ist nach den (§. 100. bis 109.) vorgetragenen Lehren mit dem ersten Dreyeck in folgendem Verhältnisse. Der Winkel r = r. Die Winkel h + h = 180 Grad. Die Winkel g + g = 180 Grad. Die Hypothenuse ist beyden gemeinschaftlich. Die Baſes G + G = 180 Grad im Bogen. Die Perpendikel H + H = 180 Grad. Wenn man nun das Neben-Dreyeck h r g, dessen Seiten alle unterquadrantisch sind, nach den (§. 110.) gegebenen Regeln berechnet, (als welches man thun kann, weil zwey bekannte Dinge von dem einen Dreyecke uns auch zwey von dem andern bekannt machen;) so braucht man nur die Supplemente zu 180 Grad, die den gleichnamigen Winkeln und Seiten des Neben-Triangels fehlen, für die gesuchten Winkel und Seiten des Triangels h r g anzusehn; so ist er berechnet.

Die letzte Art rechtwinkelichter Triangel hat eine überquadrantische Hypothenuse. Man kann aber, (weil es durch Worte zu weitläuftig wird,) durch Hülfe sich schneidender Kugelscheiben leicht zeigen, daß ein solches Dreyeck ein in allen Seiten unterquadrantisches Neben-Dreyeck habe, mit welchem ihm entweder die Baſisfläche, (oder Seite,) oder die Perpendikelfläche, (oder Seite,) gemeinschaftlich ist, und dessen Winkel und Seiten ebenfalls die Supplemente der gesuchten Winkel und Seiten desjenigen rechtwinkelichten Triangels

gels

gels enthalten, welchen man berechnen will, und an dessen Statt man das Neben-Dreyeck berechnen kann.

Wenn aber in solchen Fällen nur die Basisseite B, und der gegen überstehende Winkel N, oder die Perpendikelseite P, und der gegen überstehende Winkel M, gegeben sind; so wird nach Proportionalsätzen (§. 118.) die Antwort durch einen Sinus gegeben, der sich sowohl für einen spitzigen als stumpfen Winkel schickt, und nicht (wie die Cosinus, Tangenten und Cotangenten) für einen spitzigen Winkel durch Plus, für einen stumpfen durch Minus (§. 39, 40.) unterschieden wird. Daher uns solche Aufgaben die Wahl zwischen zweyen rechtwinkelichten Dreyecken lassen, wenn man aus andern Umständen nicht entscheiden kann.

§. 112.

1.) Wenn wir einen der Winkel eines sphärischen Dreyecks O nennen; den andern M, den dritten m; aber R den rechten Winkel, dessen Spitze auch in dem Punkte O und dessen Basis auf derjenigen Halbscheibe ist, wovon M einen Theil ausmacht: so fällt, sowohl wenn M und m beyde spitzig, als auch, wenn sie beyde stumpf sind, (— Fig. 145. 146. —) der Punkt R zwischen den Punkten M und m: wenn aber M spitzig und m stumpf ist; so fällt der

Punkt R nicht zwischen M und m, sondern jenseits m. (— wie Fig. 147. —) Wir wollen die Buchstaben M und m so gebrauchen, daß der erste als spitzig bekannt gewordne Winkel M, und alsdann der zweyte, (er mag spitzig oder stumpf seyn,) m heisse; oder daß wir den zuerst als stumpf bekannt gewordnen Winkel m, und alsdann den andern M nennen, derselbe mag stumpf oder spitzig seyn. Nun zum Beweise unsers Satzes: In dem Falle da M und m beyde spitzig oder stumpf sind, würde, wenn R nicht zwischen M und m, sondern jenseits M oder m gedacht würde, (§. 108.) aus einem der rechtwinkelichten Triangel, welche durch das Perpendikel OR oder P entstehn, folgen, daß das Perpendikel unterquadrantisch wäre; und aus dem andern rechtwinkelichten Triangel würde folgen, daß dasselbe Perpendikel OR, oder P überquadrantisch wäre. Also kann der Punkt R, weder jenseits M, noch jenseits m seyn; sondern muß zwischen ihnen fallen. Hingegen im dritten Falle, wenn M spitzig, m stumpf ist, und wenn R zwischen M und m gedacht würde; so folgte abermals aus dem Triangel ORM, daß OR unterquadrantisch seyn müßte; und aus dem Triangel ORm, daß OR überquadrantisch seyn müßte. Also muß R nicht zwischen M und m, sondern jenseits des stumpfen Winkels m fallen; nicht jenseits M, (oder jenseits des spitzigen Winkels in dem Triangel OMm). Denn da der Nebenwinkel n, des spitzigen M, schon stumpf ist; so werden alle Winkel eines aus O in

einen

Digitized by Google

einen Punkt jenseits n gezogenen, Kugelbogens auf der Basis, noch stumpfer, als n; daher man keinen rechten Winkel unter denselben finden wird. Also fällt der Punkt R des Perpendikels OR, jenseits m.

2.) **Wir haben also nur zweyerley schiefwinkelichte sphärische Triangel**, 1) solche, wenn ausgemacht ist, daß von dreyen Winkeln zwey, nämlich M und m, entweder beyde spitzig oder beyde stumpf sind, 2) solche, worinnen einer spitzig, der andre aber stumpf ist. Jene Art nenne ich **Additionstriangel**, diese aber **Subtractionstriangel**. Denn ein schiefwinkelichter Triangel der ersten Art, enthält immer 2 rechtwinkelichte Triangel; aber ein schiefwinkelichter von der zweyten Art ist immer ein Theil eines einzigen rechtwinkelichten Triangels.

§. 113.

Zwey Winkel eines sphärischen schiefwinkelichten Triangels, (— Fig. 148, 149, 150. —) **nenne ich M und m**, in der oben (§. 112.) angeführten Bedeutung; die Gegenseite des ersten nenne ich h, die **Gegenseite des andern Winkels aber H. Die dritte Seite in Additionstriangeln heißt allemal B + b, und ihr Gegenwinkel N + n. Hingegen in Subtractionstriangeln heißt die dritte Seite B — b, und ihr Gegenwinkel N — n, wobey noch dieses bedungen wird, daß die durch die kleinen Buchstaben, (ausser R)**

Digitized by Google

oder durch n, m bezeichneten Winkel, und die durch die kleinen Buchstaben (ausser P) oder durch b, h, bezeichneten Seiten, beysammen bleiben, nämlich in eben demselben der beyden zu Hülfe genommnen rechtwinkelichten Triangel, und zwar, wenn von Subtractionstriangeln die Rede ist, in dem hinzu gesetzten rechtwinkelichten Triangel. So lange es also zweifelhaft ist, ob aus den bekannten Dingen die Natur eines Additionstriangels oder Subtractionstriangels entschieden werde: so lange heisse die dritte Seite zweifelhaft, $B \pm b$, und ihr Gegenwinkel $N \pm n$.

Noch muß ich erinnern, daß im Folgenden cM, cm, cN, cn, die Complemente der Winkel M, m, N, n, oder solche Winkel bedeuten, die jenen an 180 Grad fehlen.

§. 114.

Sieben Proportionalsätze für schiefwinkelichte Triangel sind folgende.

I.) $\sin H : \sin h = \sin m : \sin M$. Denn (§. 110. II.) es ist

$$r : \sin H = \sin M : \sin P$$
$$r : \sin h = \sin m : \sin P$$

Denn (§. 39, 40.) m an der einen, und m an der andern Seite von N m, haben einerley und zwar nur positive Sinus. Dies merke ich an wegen der Subtractionstriangel. Sie haben auch, (als welches wegen der folgenden Proportionen zu merken ist,) einerley Cosinus und einerley Tangenten und Cotangenten. Doch mit dem Unterschiede, daß diese für die spitzigen Winkel positiv mit dem Pluszeichen, für die stumpfen aber negativ mit dem Minuszeichen sind.

II.)

Digitized by Google

II.) $\sin B : \sin b = \cot M : \cot m$. Denn (§. 110. III.) es ist

$r : \sin B = \cot P : \cot M$

$r : \sin b = \cot P : \cot m$

III.) $\sin N : \sin n = \cos M : \cos m$. Denn (§. 110. IV.) es ist

$r : \sin N = \cos P : \cos M$

$r : \sin n = \cos P : \cos m$

IV.) $\tan \frac{1}{2}(N + n) : \tan \frac{1}{2}(N - n) = \tan (\frac{1}{2}cM + \frac{1}{2}cm) : \tan (\frac{1}{2}cM - \frac{1}{2}cm)$ Denn (§. 49.) das erste Verhältniß ist, $(\sin N + \sin n) : \sin N - \sin n)$. Das andre Verhälniß ist, $(\cos M + \cos m) : (\cos M - \cos m)$. Daß diese beyden Verhältnisse aber gleich sind, folgt aus III. in diesem Absatze, (und Zahlenk. §. 92.)

V.) $\cos B : \cos b = \cos H : \cos h$. (Denn §. 110. V.) es ist

$r : \cos P = \cos B : \cos H = \cos b : \cos h$.

VI.) $\tan (\frac{1}{2}cB + \frac{1}{2}cb) : \tan (\frac{1}{2}cB - \frac{1}{2}cb) = \tan (\frac{1}{2}cH + \frac{1}{2}ch) : \tan (\frac{1}{2}cH - \frac{1}{2}ch)$. Denn das erste Verhältniß ist, (§. 49.) $(\cos B + \cos b) : (\cos B - \cos b)$. Das andre aber ist, $(\cos H + \cos h) : (\cos H - \cos h)$. Diese Verhältnisse aber sind gleich nach einer Folgerung aus unsrer Vten Proportion.

Digitized by Google

VII.) $\cos N : \cos n = \cot H : \cot h$. Denn (§. 110. VII.) es ist

$r : \cos N = \cot P : \cot H$, und

$r : \cos n = \cot P : \cot h$.

Man wird wegen des Gebrauchs der 6ten Proportion sich erinnern, wie man $\frac{1}{2}cB + \frac{1}{2}cb$, oder $\frac{1}{2}cB - \frac{1}{2}cb$ finde. **Erster Fall: wenn jeder von beyden Bogen, sowohl B als b, kleiner ist, als Q, oder als ein Quadrant.** Alsdann ist $cB = Q - B$; und $cb = Q - b$. Also $cB + cb = 2Q - (B + b.)$ Daher $\frac{1}{2}cB + \frac{1}{2}cb = Q - (\frac{1}{2}(B+b)) = c(\frac{1}{2}(B+b))$. Alsdann ist ferner $cB - cb = (Q - B) - (Q - b) = b - B$. Folglich ist $\frac{1}{2}cB - \frac{1}{2}cb = \frac{1}{2}(b - B)$. **Zweyter Fall: ist sowohl B als b grösser, als Q;** so findet es nicht Statt, daß eine Seite eines sphärischen Triangels $B+b$ sey. Aber da überhaupt $B + cB = Q$, und $b + cb = Q$; so sind in diesem Falle cB und cb negativ. Uebrigens aber ist, wie vorher $cB = Q - B$ und $cb = Q - b$. Folglich $cB - cb = b - B$. **Dritter Fall wenn B überquadrantisch, b aber unterquadrantisch ist.** Alsdann ist, wie vorher $\frac{1}{2}cB + \frac{1}{2}cb = c\frac{1}{2}(B + b)$ nur mit dem Unterschiede, daß weil cB, folglich auch $\frac{1}{2}cB$ negativ,

Digitized by Google

negativ, c b aber positiv ist, der Ausdruck $c\frac{1}{2}(B+b)$ bald positiv bald negativ ist; positiv nämlich, wenn $\frac{1}{2}(B+b)$ weniger, als ein Quadrant ist; negativ aber, wenn es mehr ist. Imgleichen ist alsdann auch nach der allgemeinen Regel $\frac{1}{2}cB - \frac{1}{2}cb = \frac{1}{2}(b - B)$, nur mit dem Unterschiede, daß dieses eine negative Grösse ist, weil b kleiner als B vorausgesetzt wird.

§. 115.

Von dem Gebrauche dieser Proportionen, zur Berechnung schiefwinkelichter sphärischer Triangel, sind verschiedene Belehrungen nöthig.

Von den 3 Winkeln und 3 Seiten des Triangels, in deren ganzen Anzahl 20 Ternen von Dingen sind, muß irgend eine Terne dem bekannt seyn, der die 3 übrigen Dinge soll finden oder berechnen können. Diese 6 Dinge bezeichne ich durch die einzelnen Buchstaben des Worts Sextil, und zwar so, daß dasjenige, was man jedesmal sucht, den Namen des ersten Buchstabens S führt, und daß ein aus der gesuchten Sache in die Triangelfläche hineinschauendes Auge rechtsum in Ordnung immer weiter zähle. Z. E. Wenn (— Fig. 149. —) die Seite h gesucht wird in dem

Digitized by Google

Triangel, welcher nach den Seiten h, H, (B+b); und nach den Winkeln M, m, (N+n) heißt: so ist h für S, und N+n für e, H für x, und M für t, und B+b für i, und m für l. Würde aber der Winkel M gesucht; so wäre M für S, die Seite B+b für e, u. s. w. Es ist also S allemal das Gesuchte, es sey Seite oder Winkel, und t ist allemal sein Oppositum, es sey Winkel oder Seite.

Wenn also das Oppositum t immer als bekannt angenommen wird; so sind folgende 6 Ternen der Dinge, die bekannt seyn können, wenn S gesucht wird, 1) ext, 2) eti, 3) etl, 4) xti, 5) xtl, 6) til. Wenn aber das Oppositum t immer als unbekannt angenommen wird; so sind 4 mögliche Ternen der bekannten Dinge, 1) exl, 2) exl, 3) eil, 4) xil. Mehr Fälle sind unerdenklich.

Daher ist die folgende Tabelle von Proportionalsätzen, deren in den meisten Fällen 2 nach einander gebraucht werden müssen, zureichend in allen Fällen, wenn aus 3 bekannten Dingen ein, und hernach mehr, Unbekanntes, es sey eine Seite, oder ein Winkel, gesucht oder berechnet werden soll. Die Einrichtung der Tabelle

helle ist diese. Die zwey Generalfälle sind, daß entweder eine Seite oder ein Winkel gesucht wird. Ein jeder Fall hat zwey Abtheilungen, nämlich erstens, wenn des Gesuchten, oder des s, Oppositum t, als bekannt angenommen; und zweytens, wenn es als unbekannt angenommen wird. In den Specialfällen der ersten Art, da t bekannt ist, (§. 15.) soll man die Seite s, als ein H oder als ein h, (§. 113.) das ist, als irgend eine der Hypothenusen der beyden, zu Hülfe genommnen rechtwinkelichten, Triangel suchen; und in denselben Specialfällen, da gleichfalls t bekannt ist, soll man den Winkel, als M oder m, das ist, als irgend einen der Gegenwinkel des gemeinschaftlichen Perpendikels dieser rechtwinkelichten Triangel suchen. Hingegen in den Specialfällen der andern Art, da t als unbekannt angenommen wird, soll man die Seite suchen, als $B \pm b$, das ist, entweder als die Summe, oder als die Differenz der Basisseiten der beyden rechtwinkelichten Triangel; und den Winkel soll man suchen als $N \pm n$, das ist, entweder als die Summe, oder als die Differenz der, den Basisseiten in den rechtwinkelichten Triangeln gegen überstehenden, Winkel. Die Proportionalsätze sind theils §. 110. theils §. 114. bewiesen. Die an dem ersten Orte be-

wiesenen Sätze nenne ich S, die an dem andern Orte bewiesenen aber SS. Daher bedeutet S 4 den vierten Proportionalsatz aus §. 110; hingegen SS 4 den 4ten Proportionalsatz aus §. 114. u. s. w. damit man im Nothfalle nachschlagen könne.

Wenn man sich bey Betrachtung der 148, 149, 150sten Figuren der schon bekannten Lehrsätze erinnert; so wird man einsehen, daß, wenn die Seite h als eine Hypothenuse, zu einem Perpendikel, das gefället werden kann, festgesetzt wird, es noch frey stehe, das Perpendikel entweder auf die Basis zu setzen, die es in den Figuren hat, oder ein andres Perpendikel aus dem Punkt m zu fällen, welches auf den Halbkrais fällt, wovon der Bogen H ein Theil ist. Daher kann man durch eben dieselben Proportionalsätze, durch welche man aus H, M, m, auf h schliesset, auch aus B $\pm$ b, M, und N $\pm$ n, auf h schliessen. Ferner, wenn die Basis festgesetzt ist; so bleibt der Triangel derselbe, wenn die Winkel an der Basis, zugleich mit ihren Schenkeln von der rechten nach der linken Seite, und umgekehrt, versetzet werden. Auf diese Betrachtungen gründet sich das Recht, wie in der folgenden Tabelle geschehn ist, eben dieselben Proportionalsätze

Digitized by Google

sätze zur Beantwortung von mehr als einer Frage anzuweisen, und Verwechselungen der Seiten oder Winkel zu verlangen.

Die Buchstaben aus dem Worte Sextil sind der Tabelle beygefügt, um durch Hülfe des Vorigen sehen zu lassen, daß für alle erdenkliche Fälle gesorgt sey. Die darunter stehenden Buchstaben bedeuten immer 3 Dinge aus dem Triangel, dessen 6 Dinge, (die Winkel sind punktirt,) wenn man von der Seite h anfängt, so auf einander folgen: h, (N ± n), H, M, B ± b, m. Fig. 148, 149, 150.

I. Eine

Digitized by Google

I. Eine Seite zu finden.

1) S sey h, weil t oder M, das Oppositum, bekannt ist.

Ternen.	Proportionalsätze:
e, x, t, N ± n, H, M	1. (S. 6.) cot M : r = cos H : cot N (SS. 7.) cos N : cos n = cot H : cot h
e, t, i, N ± n, M, B ± b	2. Dieser zweyte Fall ist der fünfte, wenn man B ± b mit H, und N ± n mit m verwechselt, oder das Perpendikel aus dem Punkte m fället.
e, t, l, N ± n, M, m	3. (SS. 4) tan ($\frac{1}{2}$ cM + $\frac{1}{2}$ cm) : tan ($\frac{1}{2}$ cM − $\frac{1}{2}$ cm) = tan $\frac{1}{2}$(N+n) : tan $\frac{1}{2}$(N−n) (S. 6.) r : cot m = cot n : cos h
x, t, i, H, M, B ± b	4. (S. 1.) cos M : r = cot H : cot B (SS. 5.) cos B : cos b = cos H : cos h
x, t, l, H, M, m,	5. (SS. 1.) Sin m : Sin M = Sin H : Sin h

6.

Digitized by Google

	6.
t, i, l, M, B ± b, m	Dieser Fall ist dem ersten gleich, wenn man B ± b mit H, und m mit N ± n, verwechselt, oder das Perpendikel aus dem Punkte m fället.

Anmerkung. Will man nicht h, sondern H suchen, so dienen dieselben Proportionen, wenn man allenthalben h mit H, und M mit m verwechselt.

2) S sey B ± b, weil t, das Oppositum, oder N ± n, unbekannt ist.

Ternen:	Proportionalsätze:
e, x, i, m, h, H,	7. Dieser Fall ist dem folgenden 10ten dieser Art gleich, wenn man m mit M, und h mit H verwechselt.
e, x, l, m, h, M,	8. Vermittelst derselben Verwechselung ist dieser Fall dem folgenden 9ten gleich.
e, i, l, m, H, M,	9. (S. 1.) cos M : r = cot H : cot B (SS. 2.) cot M : cot m = Sin B : Sin b
x, i, l, h, H, M,	10. (S. 1.) cos M : r = cot H : cot B (SS. 5) cos H : cos h = cos B : cos b

11.

II. Einen Winkel zu finden.

1) S sey m, weil t oder H, das Oppositum, bekannt ist.

Ternen:	Proportionalsätze:
e, x, t, h, N ± n, H	11. Ist dem sechszehnten Falle gleich, wenn man h mit B ± b, und N ± n mit M verwechselt, das ist, wenn man das Perpendikel aus dem Punkte m fället.
e, t, i h, H, M	12. (SS. 1.) Sin h : Sin H = Sin M : Sin m
e, t, l h, H, B ± b	13. (SS. 6.) tan ($\frac{1}{2}$cH + $\frac{1}{2}$ch) : tan ($\frac{1}{2}$cH — $\frac{1}{2}$ch = tan ($\frac{1}{2}$cB + $\frac{1}{2}$cb) : tan ($\frac{1}{2}$cB — $\frac{1}{2}$cb) (S. 1.) cot b : cot h = r : cos m
x, t, i N ± n, H, M	14. (S. 6.) cot M : r = cos H : cot N (SS. 3.) Sin N : Sin n = cos M : cos m
x, t, l N ± n, H, B ± b	15. Ist dem 12ten Falle gleich, wenn man N ± n in M, und B ± b in h verwandelt, wie schon gesagt ist.

16.

Digitized by Google

t, i, l H, M, B ± b	16. (S. 1.) cos M : r = cot H : cot b (SS. 2.) Sin B : Sin b = cot M : cot m

Anmerkung. Will man nicht m, sondern M suchen; so dienen dieselben Proportionen, wenn man allenthalben M für m, und h für H setzt.

2) S sey N ± n, weil t, das Oppositum, oder B ± b, unbekannt ist.

Ternen:	Proportionalsätze:
e, x, i H, M, m	17. (S. 6.) cot M : r = cos H : cot N (SS. 3.) cos M : cos m = Sin N : Sin n
e, x, l H, M, h	18. (S. 6.) cot M : r = cos H : cot N (SS. 7.) cot H : cot h = cos N : cos n
e, i, l H, m, h	19. Ist gleich dem 18ten Falle, durch Verwechselung des m mit M, und so weiter.
x, i, l M, m, h	20. Ist dem 17ten Falle gleich, durch Verwechselung des h mit H.

Wenn

Digitized by Google

Wenn man die Sammlung dieser Fälle betrachtet, wird man finden, daß alle erdenkliche da sind, und daß immer durch die erste Proportion in jedem Falle eine Sache bestimmt wird, deren man als der dritten Sache bedarf, um durch die zweyte entscheidende Proportion das Gesuchte nach Möglichkeit zu bestimmen. Ich sage, nach Möglichkeit. Denn gleichwie, wenn von ebenen Triangeln die Rede ist, zwey gegebene Winkel und eine gegebene Seite, wenn diese von jenen beyden nicht eingeschlossen ist; oder gleichwie zwey Seiten und ein von ihnen nicht eingeschlossener Winkel, allemal die Möglichkeit übrig lassen, aus den gegebenen Dingen zweyerley Triangel zu bilden; also ist es auch in der sphärischen Trigonometrie, oder in der Lehre von sphärischen Triangeln. Es bleibt nämlich in den gesagten Fällen die Möglichkeit übrig, zweyerley Triangel zu denken, in welchen beyderseits die drey gegebenen Dinge Statt finden. Dieses ist kein Mangel in der Lehre, sondern gegründet in der Natur der Sache. Von dieser Art sind die Fälle 5, 9, 10, 12, 17 und 18. In diesen Fällen ist entweder sowohl ein Additionstriangel als ein Subtractionstriangel möglich; oder, wenn dieses bestimmt ist, so kann doch die Wahl zwischen einer grössern und kleinern Seite übrig bleiben.

Digitized by Google

X.

Einiger Vorschmack der höhern Geometrie.

§. 116.

Unter den Namen, höhere Geometrie, verstehn die Meisten alle Lehren, die sich auf die Beschaffenheit regelmässiger krummer Linien, (besonders solcher, die vom Zirkelkraise verschieden sind,) gründen; und welche gemeiniglich methodisch erleichtert werden, durch geometrischen oder algebraischen Gebrauch solcher Gleichungen, worinnen Zeichen unendlich kleiner und unendlich grosser (§. 4.) Grössen vorkommen. Diese Beschreibung wird man völlig verstehn, ehe man zu Ende dieses Hauptstückes gekommen ist.

Die höhere Geometrie aber besteht nicht aus unbrauchbaren Grübeleyen; sondern hat mancherley grossen Nutzen. 1) Sie verkürzt und vervollkommnet viele nützliche Erkenntnisse, zu welchen uns die gemeine Geometrie, auf eine nicht so gute Art, hinführen kann. 2) Sie ist fast unentbehrlich bey der Berechnung des Umlaufes der Weltkörper. 3) Manche nutzbare Regelmässigkeit in der Bewegung der Körper auf Erden, manche Verhältnisse ihrer Oberflächen und ihres körperlichen Inhalts lassen sich nicht wohl berechnen, viel weniger nachahmen, ohne Gebrauch einiger, aus der höheren Geometrie, entlehnten Wahrheiten.

Digitized by Google

§. 117.

Wenn man — Fig. 150. — ausserhalb, oder — Fig. 152. — innerhalb der Krümmung einer krummen Linie K, eine gerade Linie G, und zwischen beyden solche Parallel-Linien als a, a, a denkt; so heißt G die Basis, und jede Linie a eine Applicate der krummen Linie.

Nimmt man in der Basis — Fig. 151. — eine Richtung und einen ersten Punkt an, z. E. den Punkt A: so heißt die Basis die Abscissenlinie. Ein jeder Theil derselben aber von dem Anfangspunkte A an, bis an den Punkt, wo eine Applicate hinein fällt, heißt die Abscisse zu dieser Applicate, und zu dem Punkte, (in der krummen Linie,) in welchen die Applicate fällt.

Wenn z. E. — Fig. 153. — zu der krummen Linie AZ die Linie AH die Basis oder Abscissenlinie ist; wenn man A zum Anfangspunkte derselben macht; wenn mp und mp Applicaten sind: so gehört Ap, als Abscisse, zu dem Puncte m und zu dem Theile der krummen Linie zwischen A und m, zu welchem auch mp, als Applicate gehört. Wird von der krummen Linie der Theil Am betrachtet, und ist folglich mp die Applicate; so ist Ap die dazu gehörige Abscisse.

Die Applicaten mp und mp nennt man auch Ordinaten; Coördinaten aber eine zusammen gehörige Abscisse und Ordinate.

Wenn man durch jeden Punkt der Abscissenlinie eine, auf beyden Seiten des Punktes in zwey gleiche Hälften zerfallende, Linie von einem Punkte der krummen Linie in einen andern Punkt derselben ziehen kann: so heißt die Abscissenlinie der **Durchmesser**; und von diesen beyden Hälften der ihn schneidenden Linien heißt eine die **positive**, die andere die **negative Ordinate**. Ist (Fig. 154.) Cm die positive Ordinate; so ist auf der andern Seite cm die negative. Den Anfangspunkt des Durchmessers aber, oder A, nennt man die **Scheitel** der krummen Linie. Und wenn diese positiven und negativen gleichen Ordinaten rechtwinkelicht auf dem Durchmesser stehen: so heißt man den Durchmesser die **Axe**, z. E. AM; daher ist jeder Durchmesser eines Zirkelkraises eine Axe desselben. Denn wenn man ihn rechtwinkelicht schneidet; so ist von einem jeden seiner Punkte bis in den Krais zur Linken und zur Rechten ein gleiches Paar Ordinaten.

Wenn eine krumme Linie so beschaffen ist, daß es in der Axe einen Punkt c giebt, durch welchen aus jedem Punkte der krummen Linie eine gerade Linie gezogen werden kann, die nach gehöriger Verlängerung abermals in einen Punkt der krummen Linie fällt, und durch den Punkt c halbirt wird; so nennt man den Punkt c den **Mittelpunkt** der krummen Linie. Man kennt diesen Punkt in dem Zirkelkraise. In der Ellipse — Fig. 154. — ist gleichfalls c der Mittelpunkt.

Digitized by Google

Der Mittelpunkt liegt in der Axe. Wenn nun die Axe von der krummen Linie zweymal durchschnitten wird, und folglich aufhört, wie die Axe des Zirkelkraises und der Ellipse, so hat die Summe der, durch den Mittelpunkt der Axe rechtwinkelicht durchgehenden, positiven und negativen Ordinaten, den Namen der zweyten Axe. Daher, wenn man einen Durchmesser des Zirkelkraises auf den andern rechtwinkelicht stellet: so ist einer die erste und der andere die zweyte Axe. In der Ellipse aber ist die erste Axe die grosse AM, und die zweyte die kleine Axe mcm. Doch davon mehr weiter unten.

Die Tangente einer krummen Linie — Fig. 153. wie Tt, streift an ihrer erhabnen Seite und an einem einzigen Berührungspunkte derselben, m, so vorbey, daß sie nicht innerhalb der Krümmung derselben hinein geht, sondern daß sie auf beyden Seiten des Berührungspunktes sich von der krummen Linie entfernet. Ein zureichendes Exempel sind die Tangenten an dem Zirkelkraise.

Die aus dem Berührungspunkte der Tangente — Fig. 153. — rechtwinkelicht bis in die Abscissenlinie gehende gerade Linie, mH, heißt die Normale derjenigen Tangente, oder desjenigen Punkts in der krummen Linie, oder derjenigen Ordinate und Abscisse, von welchen jedesmal die Rede ist.

Die

Die Subtangente (Fig. 153.) desselben Punkts m der krummen Linie reicht in der Abscissenlinie von dem Punkte p an, (welcher die Abscisse Ap und die Ordinate pm verbindet,) bis an T, wo die Tangente in die verlängerte Abscissenlinie fällt; kurz, sie ist pT.

Die Subnormale (Fig. 153.) aber desselben Punkts m in der krummen Linie ist Hp; oder sie ist in der Abscissenlinie derjenige Theil, welcher zwischen dem Endpunkte der Normale H, und zwischen dem Endpunkte der Abscisse p lieget.

Eine jede krumme Linie hat eine erhabene und eine hohle Seite; z. E. die erhabne, wenn man einen Zirkelbogen von aussen betrachtet, die hohle, wenn er von innen betrachtet wird.

Noch ist zu merken auf der Axe einer krummen Linie der Brennpunkt, durch welche diejenige doppelte (zur Hälfte positive, zur Hälfte negative) Ordinate geht, welche (nämlich gedoppelte Ordinate) eine vorausgesetzte (beständige) Linie ist, und der Parameter heißt. Des Zirkelkraises Brennpunkt ist zugleich der Mittelpunkt, und der Parameter desselben ist also der Axe gleich.

Dieses sind die ersten Begriffe, durch deren Hülfe man zweckmässige Betrachtungen über krumme Linien anstellt; theils um sie zu rectificiren, das ist, um ihre Länge mit der Länge einer

Digitized by Google

gerader Linie zu vergleichen; theils um sie zu quadriren, oder ihre Quadratur zu finden, das ist, zu wissen, wie groß der Flächenraum sey, zwischen der hohlen Seite einer regelmässigen krummen Linie von gewisser Art, (oder eines Bogens derselben,) und zwischen einem Winkel gerader Linien, von dessen Schenkeln die krumme zweymal (gleichwie der halbe Zirkelkrais von seinem Durchmesser) oder der Quadrant von 2 Halbmessern durchschnitten wird. Und auf diese Erkenntniß beruhet oftmals ein wichtiger Schluß, z. E. auf die Grösse der Oberfläche eines regelmässig gekrümmten Körpers, oder auf seine Cubirung, das ist, auf den körperlichen Inhalt desselben.

§. 113.

Hier bitte ich, von Neuem zu überdenken, was gleich Anfangs (§. 4.) von dem Unendlich-Kleinen und Unendlich-Grossen gesagt ist.

Nach der dortigen Denkart bezeichne man eine jede unendlich grosse Zahl durch m. Diese unendlich grosse Zahlen sind nicht alle gleich groß. Denn wie man eine unendliche Zahl denkt, so kann man auch das Zwiefache und Tausendfache derselben denken, welche gewiß unter einander nicht gleich sind. Aber m ist mir das allgemeine Zeichen einer jeden unendlichen Zahl, oder der ganzen Gattung, woraus man nicht schließen muß, daß Alles, was ich m nenne, gleich sey. Aber zuweilen werde ich eine unendliche Zahl von der andern unterscheiden; indem ich das m entweder auf verschiedene Art

punctire,

punctirte, m, m, m, m, oder in Verbindung mit andern Zahlen und Buchstaben setze, welche nicht unendliche Zahlen bedeuten, z. E. 2m, 4m, $\frac{m}{2}$, $\frac{m}{4}$, m^2, m^3, m^{-2}, m^{-3}, $m^{\frac{1}{2}}$, oder am, bm, $\frac{m}{a}$, $\frac{m}{b}$, m^a, m^b, m^{-a}, m^{-b}, $m^{\frac{a}{b}}$, $m^{\frac{b}{a}}$ u. s. w. Dieses sind lauter Zeichen und Begriffe, die ich aus der Zahlenkunst oder Algebra als bekannt voraussetze. Und ohne diese Voraussetzung, kann man Jemanden von der höhern Geometrie nur einen sehr unvollkommnen Vorschmack geben.

Es heisse also m eine jede unendliche Zahl. So wird eine jede, durch m dividirte, oder durch 1 : m multiplicirte, Grösse g, oder so wird g : m ein Unendlich-Kleines von der Art g, was g auch bedeuten mag. Ist g, z. E. ein halber Zirkelkrais; so ist g : m ein unendlich kleiner Theil, oder ein Infinitesimaltheil desselben, nach den anfangs (§. 4.) gegebenen Begriffen. Ein solcher unendlich kleiner Theil einer Grösse g, wird, wie daselbst gesagt ist, durch Vorsetzung des d bezeichnet. Dieß d ist also gleichsam der Factor 1 : m. Daher $dg = g : m$. Ist g ein Bogen, ein Sinus, eine Tangente, eine Kugelfläche, u. s. w. so ist dg ein Infinitesimaltheil derselben Art.

Von allen Zahlen, welche auf 1, 2, 3 ... 100, ... 1000, ... u. s. w. folgen, und welche

gedacht, ausgesprochen oder geschrieben werden, ist keine groß genug, um durch m ausgedrückt, oder für eine unendlich grosse Zahl angesehn zu werden. Es bedeutet also m, oder das Zeichen einer unendlich grossen Zahl, irgend eine so grosse Zahl, von welcher eine jede angebliche noch so grosse Zahl übertroffen wird. Also ist ein dg oder ein g : m, oder ein Infinitesimaltheil von g, ein so kleiner Theil von g, daß sich die Menge solcher Theile durch keine angebliche Zahl ausdrücken läßt; oder kurz, dg, der Infinitesimaltheil, ist kleiner, als ein jeder angeblicher Theil.

Es sey g eine endliche Grösse, von welcher Art man will, und c ein noch so kleiner angegebener Theil derselben; so ist doch klar, daß wenn man g halbiret, und die durch Halbirung vorgestellte Hälfte wieder zu halbiren beständig fortfähret, oder wenn man diese beständig fortdaurende Halbirung als geschehen betrachtet; es ist klar, sage ich, daß man sich alsdann, (auf die mögliche Art,) von der endlichen Grösse g einen solchen Theil vorstellt, welcher kleiner ist, als ein jeder angeblicher Theil davon; kleiner als ein jedes c. So stellt man sich vor ein dg, oder ein g : m, oder einen Infinitesimaltheil von g. Es fehlet uns also nicht an dem Begriffe von einem Infinitesimaltheil.

Man nennt aber, unter zwey Grössen mq, und q, wenn eine derselben als ein Product aus der andern, vermittelst einer unendlich grossen Zahl m gedacht

gedacht wird, in Vergleichung beyden, das Product mq relativisch unendlich groß, und den Factor q relativisch unendlich klein, welcherley Größe q auch bedeuten mag, entweder eine endliche, oder eine unendlich-kleine, oder eine unendlich-grosse. Z. E. es sey q eine unendlich lange gerade Linie: so ist sie doch gegen die durch einen Ausdruck gedachte Linie mq unendlich klein. Denn mq enthält die Länge q unendliche mal. Es sey q eine unendlich kleiner Theil einer Quadratfläche: so ist es doch relativisch gegen q unendlich groß. Denn

$$q : \left(\frac{q}{m}\right) = m : 1.$$

Daher, wenn m etwas Unendlich-Großes bedeutet, von welcher Art es auch sey, so ist in dieser Reihe $m^{-2}, m^{-1}, m^{0}, m^{1}, m^{2}, m^{3}$, u. s. w. ein jedes vorhergehende Glied relativisch unendlich klein, gegen ein jedes nachfolgende Glied, weil die Multiplication durch m, oder durch eine höhere Potenz von m, allemal aus dem Vorhergehenden das Folgende macht. Man setze p für m, und denke unter p etwas Unendlich-Kleines: so ist in der Reihe $p^{-2}, p^{-1}, p^{0}, p^{1}, p^{2}, p^{3}$, ein jedes vorhergehende Glied relativisch unendlich groß, gegen ein jedes folgende. Denn jedes folgende wird aus dem vorhergehenden gemacht, durch den Factor p, welcher etwas Unendlich-Kleines, oder 1 : m ist; oder, (welches einerley sagt,) ein vorhergehendes Glied entsteht aus dem folgenden, vermittelst des unendlich großen Factors m, oder m^{2}, m^{3}, m^{4}, u. s. w.

Dieses führet zu mehrern Fällen brauchbare Begriffe von niedrigern und höhern Ordnungen oder Stufen in dem Unendlich-Grossen oder in dem Unendlich-Kleinen.

Wenn Etwas absolut oder relativisch unendlich groß ist; so macht die Multiplication durch m, oder durch eine höhere Potenz von m, aus demselben Etwas, welches absolut oder relativisch unendlich groß von einer höhern Ordnung ist. Eben so ist es mit dem Unendlich-Kleinen. Die Division durch m macht es zu einem Unendlich-Kleinen von einer höhern Ordnung. Daher, wenn n, p, r, positive und zunehmende Total-Zahlen bedeuten, so ist klar, daß wenn q schon unendlich groß ist, q^n, q^p, q^r, u. s. w. in die höhern Ordnungen des Unendlich-Grossen hinauf steigen. Denn das q, wodurch das Vorhergehende immer multiplicirt wird, ist alsdann ein mg, folglich in der Gattung der m, oder der unendlich grossen Dinge seiner Art. Hingegen wenn q etwas Unendlich-Kleines, oder ein g:m bedeutet, (und n, p, r, wie vorher, positive Totalzahlen sind): so steigt die Reihe q^n, q^p, q^r in die höheren Ordnungen oder Stufen des Unendlich-Kleinen. Denn das Folgende entsteht immer aus dem Vorhergehenden, vermittelst der Multiplication durch g:m, oder, weil in unbestimmter Weise alle unendlich grossen Zahlen bedeutet, durch r:m, oder durch eine höhere Potenz desselben.

Wer

Wer diese Angabe gefaßt hat, ändert sich nicht, daß für nichts gerechnet werden: 1) Ein Unendlich-Kleines in Vergleichung mit dem, was nicht unendlich klein ist, 2) das Unendlich-Kleine von einer höhern Ordnung, in Vergleichung mit dem Unendlich-Kleinen von einer niedrigern Ordnung, 3) das Unendlichgrosse von einer niedrigern Ordnung, in Vergleichung mit dem Unendlich-Grossen von einer höhern Ordnung. Ich will mich eines Gleichnisses bedienen. Man kann eine unaufhörliche Dauer, oder ein D, welche mz, oder eine unendlich zahlreiche Summe von endlichen Zeiten ist, einmal, zehnmal, und, (wie man das Unendliche denkt,) unendliche mal, oder m mal denken. Denn man darf zu, wenn ich so reden mag, die Dauren D + D + D, u. s. w. als Theile einer einigen, grossen Dauer einer unendlichen Anzahl unaufhörlicher Dinge in der Worterkenntniß oder Zeichenerkenntniß, (denn in der wahren Sacherkenntniß geht dieses nicht an,) zu einander addiren und ein mD daraus machen. Es ist z, oder eine endliche Zeit, gegen mz, oder gegen D, wie Nichts. Aber D hat dasselbe Verhältniß gegen mD, als z gegen mz, oder gegen D. Also ist auch D gegen mD wie Nichts, oder ein Infinitesimaltheil. Wie Nichts seyn aber heißt hier nichts anders, als ein Infinitesimaltheil, oder als ein solcher Theil seyn, der durch keine gebrochne Einheit ausgedrückt werden kann, als durch $\frac{1}{m}$, zu welcher der Nen-

ner

ner eine unendlich grosse Zahl ist. Nun bemühe man sich, die Reihe D^0, D^1, D^2, (in der Zeichenkunst) zu denken: so ist jedes vorhergehende Glied gegen das folgende wie Nichts. Denn $D^1 = mz$. Aber $D^2 = mz \cdot mz = m^2 z^2$. Aus D^1 erwächst also D^2, vermittelst der Multiplication durch eine positive Total-Potenz von m. Also ist D^1 gegen D^2 wie Nichts. Ferner, man stelle sich ein $\frac{1}{m}$, oder ein dz, oder einen Infinitesimaltheil von der endlichen Zeit z vor. Man nenne das dz, welches in z unendliche mal, oder m mal enthalten ist, ein t. Ist nicht t gegen z wie Nichts? Nun stelle man sich die Reihe vor t^0, t^1, t^2, u. s. w. Es ist $t = \frac{z}{m}$. Also ist $t^2 = \frac{z^2}{m^2} = t \cdot \frac{z}{m}$. Also ist t^2 aus t, vermittelst der Multiplication durch $\frac{1}{m}$ entstanden. Daher ist es ein Infinitesimaltheil von t, und gegen dasselbe wie Nichts, obgleich selbst gegen die endliche Zeit z schon ein $\frac{z}{m}$, oder ein dz, oder ein Infinitesimaltheil ist.

In den meisten Schriften ist das allgemeine Zeichen einer unendlich grossen Zahl dieses ∞. Also ist $d\infty$, oder das Unendlich-Kleine von ∞ dasselbe, was $\frac{\infty}{\infty}$ ist, oder $\frac{1}{\infty} \cdot \infty$.

§. 119.

Was relativ unendlich klein ist, (§. 118.) und als Zusatz oder Abnahme seines relativen Unendlich-Grossen vorkommt, ist, nach seiner Grösse betrachtet, (§. 118.) wie nichts gegen dasselbe, und man kann Nulle (oder o) an seiner Statt setzen; nehmlich in allen Fällen, worinnen man ein Unendlich-Kleines (es sey absolut oder relativ) nicht aus diesem Grunde stehen läßt, weil man aus dem geometrischen Verhältnisse einer unendlich kleinen Grösse zu einer andern unendlich kleinen Grösse Etwas schliessen will. Denn die unendlich kleinen Dinge können sich zu einander verhalten, welches ich bald zeigen will, wie Dinge, welche nicht unendlich klein sind, wie das Einfache, Zwiefache, Zehnfache, oder das Zweytheil, Dritthel, Zehntheil, u. s. w. Und zuweilen kann uns das, durch geometrische Schlüsse erkennbare, Verhältniß unendlich kleiner Grössen, wenn es zweyen Verhältnissen, zwischen zweyen Paaren endlicher Grössen (das ist, solcher Grössen, die weder unendlich klein noch unendlich groß sind) gleich ist, dazu verhelfen, die Gleichheit der Verhältnisse endlicher Grössen einzusehen, deren Erkenntniß allemal der Zweck ist, um welches willen wir die Betrachtung des Unendlich-Kleinen oder des Unendlich-Grossen zu Hülfe nehmen.

Wenn aber diese Absicht nicht ist; so vernachlässigen wir in den Gleichungen allemal

mal einen relativisch unendlich kleinen Zusatz oder Abgang, wie bey Messung eines Berges von Sandkörn. Daher ist g + dg = dg = g — dg. Ja, so lange n eine unendliche Zahl ist; so ist g = g + ndg = g — ndg. Ja, $\frac{g}{n} = \frac{g}{n} + ndg = \frac{g}{n} - ndg$. Oder dasselbe nach allgemeiner in Worten: Eine endliche Zahl von relativisch unendlich kleinen Dingen, als Zusatz oder Abgang betrachtet, vergrössert oder vermindert dasjenige, in Ansehung dessen sie unendlich klein sind, schlechterdinge nicht so, daß das Ganze dadurch eine betrachtungswürdige Veränderung leiden sollte; die Dinge, welche gegen einander als relativisch groß oder klein angesehen werden, mögen an eigenthümlicher Grösse seyn, wie man will. Wer einen Haufen Berge misst, der so zahlreich ist, als die Sandkörner eines einzigen, der vernachlässigt mit eben dem Rechte eine Anzahl Berge, wie wir eine Anzahl Sandkörner eines einzigen Berges. Doch ganz passen kann dieses Exempel nicht. Denn weil der Sandkörner in einem Berge eine endliche Zahl ist, und n eine sehr grosse endliche Zahl bedeuten kann; so muß das n sehr eingeschränkt seyn, wenn man bey Messung eines Berges die Grösse vieler Sandkörner, deren Anzahl n ist, soll vernachlässigen dürfen. So ist es aber nicht mit dem relativisch Unendlich-Kleinen und Grossen; sondern jenes ist in diesem m mal, oder unendliche mal enthalten. Ist jenes g; so ist dieses

diese mg. Da nun jede endliche Zahl n, gegen jede unendliche Zahl m, wie Nichts ist; so ist auch ng gegen mg, (oder das durch eine endliche Zahl multiplicirte relativisch Unendlich-Kleine gegen das relativisch Unendlich-Grosse) wie Nichts.

Man merke also folgende Lehrsätze: 1) In dem Urtheile über die Grösse der Dinge, setze man niemals, (weder in positiver noch in negativer Bedeutung,) eine endliche Anzahl relativisch-unendlich-kleiner Dinge mit demjenigen zusammen, was in Vergleichung mit ihnen relativisch-unendliche gross ist; sondern man lasse das relativisch Unendlich-Kleine weg. 2) Und wenn, in Ansehung der Grösse g, die Grösse q; und in Ansehung der Grösse G, die Grösse Q relativisch-unendlich-klein ist; so bekömmt das geometrische Verhältniss eines jeden bestimmten Products von g, zu einem jeden bestimmten Producte von G keine betrachtungswürdige Veränderung, wenn g durch Zusatz oder Abzug einer endlichen Anzahl von Dingen, welche q sind, und wenn G durch Zusatz oder Abzug einer endlichen Anzahl von Dingen, welche Q sind, vergrössert oder verkleinert wird. Dieses ist nach allem Nutzen, den wir von unserer Erkenntniss suchen, und nach dem Begriffe, den wir von dem relativisch-Unendlichen-Grossen und Kleinen haben, weit richtiger, als daß die Caspische See gegen die

Ost-

Ost-See keine merkwürdige Veränderung in ihrem Verhältnisse gegen einander leiden, wenn einer oder beyden 10000 Wassertropfen zugelegt oder abgenommen werden.

Die Infinitesimal-Nulle, die man zuweilen auch als Nulle schreibt, ist kein gänzlich undenkbares Ding, wie der Rest 4 — 4, oder a — a ist, sondern ein unendlich kleiner Bruch, welcher der Quotient ist, wenn man etwas relativisch-unendlich-Kleines durch sein relativisch-unendlich-Grosses dividiret. Wenn wir also das relativisch-unendlich-Große durch ∞ bezeichnen; so ist in dieser Bedeutung $\frac{a}{\infty} = o$. Und $o \infty = a$. Man setze b statt a; so ist dasselbe wahr. Es ist $\frac{b}{\infty} = o$ und $o \infty = b$. Aber daraus folgt nicht, daß a und b gleich sind. Denn sowohl die Infinitesimal-Nulle als das Zeichen ∞, und folglich das Product $o \infty$ bedeuten etwas Unbestimmtes, das einmal grösser seyn kann, als das andre mal; nämlich die Infinitesimal-Nulle bedeutet einen jeden unendlich kleinen Bruch, und das Zeichen ∞ ein jedes relativisch-Unendlich-Grosses. Daher sind folgende Sätze, $a : b = a \infty : b \infty = \frac{a}{\infty} : \frac{b}{\infty} = o : o = o \infty : o \infty = \infty : \infty$, nur alsdann wahr, wenn man nichts daraus folgert, was die Unbestimmtheit der Bedeutung dieser Zeichen daraus zu folgern verbietet.

§. 120.

Wenn wir einen Zirkelkrais denken; so ist die Grösse jedes Durchmessers und jedes Halbmessers

sind festgesetzt, und in allen Fällen beständig gleich. Aber in Betrachtung dieses Zirkelkreisses sind eine unendliche Anzahl von kleinern und grössern Abscissen, Ordinaten, Bogen, Sinus, Cosinus, Quersinus, Tangenten, Secanten, und so weiter, denkbar. Daher heißt die Gattung der Durchmesser und Halbmesser in Betrachtung des Zirkelkreisses, die Gattung der beständigen Linien oder Grössen; hingegen die andern Gattungen der Linien heissen die unbeständigen Grössen. Wenn nun eine krumme Linie vorgegeben ist; so hat man in ihrer Betrachtung allezeit sowohl beständige als unbeständige Linien. Es versteht sich aber von selbst, daß ein jedes Product, wozu einer der Factoren eine unbeständige Linie oder Grösse ist, folglich, daß auch jede Potenz einer unbeständigen Grösse unbeständig sey.

Die Axe ist nur alsdann eine beständige Linie, wenn sie endlich ist, das ist, wenn ein Anfangspunkt und ein Endpunkt derselben (§. 117.) durch einen doppelten Durchschnitt der krummen Linie bestimmt wird. Bey dem Zirkelkreisse und der Ellipse, ist nicht nur die erste Axe (§. 117.) sondern auch die zweyte, welche bey der Ellipse die kleine Axe heißt, eine beständige Grösse.

Aber unbeständig bey allen krummen Linien sind die Abscissen, und die Ordinaten, (§. 117.). Jene pflegt man allemal x, diese y zu heissen.

Zwey unbeständige Grössen, von der Art u und von der Art v, stehn mit einander in Verbindung, wenn ein jedes verschiedenes u sein verschiedenes v hat; so daß entweder, wenn u wächst, v auch wächst, und, wenn u abnimmt, auch v abnimmt; oder daß, wenn eines abnimmt, das andre wächst. Z. E. Die Abscissen x auf der Axe, und die Ordinaten y des Zirkelkraises sind in Verbindung. Denn wenn der Anfangspunkt der Abscissen, (§. 117.), der Scheitelpunkt (oder der Anfang der Axe in dem Umkraise) ist: so ist anfangs $x = o$, und $y = o$, oder unendlich klein. Hernach wächst x und y zugleich, aber y bleibt grösser als x, bis y dem Halbmesser gleicht. Alsdann ist x dem y gleich. Wächst x ferner; so nimmt y ab, bis ein x so groß ist, als der Durchmesser, und y abermals Nulle wird.

§. 121.

Aber die Verbindung der unbeständigen Grössen, die bey regelmässigen krummen Linien zusammen gehören, ist regelmässig; das ist, man kann allemal eine Gleichung machen, deren erstes Glied die unbeständige Grösse y (in irgend einer Potenz) ist, und deren (dem y in gehöriger Potenz gleich gesetztes) zweytes Glied theils aus beständigen, theils aus solchen unbeständigen oder veränderlichen Grössen bestehet, die mit y in Verbindung sind. Z. E. vom Zirkelkraise ist allemal wahr, (§. 35.) daß, (wenn a der Durchmesser, y die Ordinate, x die Abscisse heißt,)

y die

y die mittelste Proportionallinie zwischen x und zwischen a — x sey. Oder $y^2 = ax - x^2$. Oder $y = \sqrt{ax - x^2} = (ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$.

Wenn eine Grundgleichung oder Regel gegeben ist nach der Form $y^m = ax^n$, oder $= x^n \pm a$; oder $ax^n \pm b$; so können zwar die unbeständigen Grössen, y und x, mancherley seyn; z. E. positiv, negativ, grösser, kleiner, auch Nulle. Aber wenn eine derselben festgesetzt ist; so kann die andre nicht mehr so mancherley seyn; sondern ist bestimmter. Alsdann heissen die, (mit Hülfe bekannter Grössen, a oder b,) durch einander bestimmbare, unbeständige Grössen unter einander Functionen. Doch zuweilen heißt auch die Gleichung selbst die Function dieser so durch einander bestimmbaren unbeständigen Dinge. Es ist z. E. (wenn y die Ordinate, x die Abscisse, a die Axe im Zirkel heißt,) die Grundgleichung $y^2 = ax - x^2$, folglich sind die Abscissen und Ordinaten sich einander Functionen. Ist $a = 16$, und $x = 4$; so muß y seyn die Wurzel aus $(16.4) - (4^2) = \sqrt{48} = \sqrt{16.3} = 4\sqrt{3}$.

Alle krumme Linien, deren zur Regel dienende Gleichungen einerley Höhe haben, so daß eine jede dieser Gleichungen quadratisch, eine jede cubisch, eine jede biquadratisch, u. s. w. ist, gehören zu einerley Ordnung. Aber zu verschiedenen Ordnungen gehören diejenigen, deren Regeln oder Gleichungen

verschiedene Höhen haben. Z. E. Es bedeute a und b beständige Grössen, aber x Abscissen, y Ordinaten. Die Gleichungen $y^2 = ax$; und $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$; und $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$, und $y^3 = ax - x^2$, sind alle quadratisch. Daher gehören die krummen Linien, denen sie zur Regel dienen, zu derselben Ordnung. Aber, weil die Gleichung $y^3 = a^2x$ cubisch, und die Gleichung $y^2 = ax$ quadratisch ist; so gehören die krummen Linien, deren Regeln (Definitionen oder Functionen) sie sind, zu verschiedenen Ordnungen. Wenn aber für krumme Linien von verschiedener Ordnung übrigens dieselbe Gleichung, wenn man ihren Potenzialexponenten unbestimmt läßt, die Regel ist; so gehören sie doch zu einerley Art Ordnung, wie die krumme Linie, deren Regel ist $y^2 = ax$, und diejenige, deren Regel ist $y^3 = a^2x$. Denn läßt man die Exponenten unbestimmt: so haben sie beyde die Regel $y^m = a^{m-1}x$. Die Linien von einerley Art haben auch einerley Namen. Z. E. heißt die Linie, deren Regel folgende ist, $y^2 = ax$, eine Parabel: so ist auch $y^4 = a^3x$ eine Parabel, oder sie ist von der Art der Parabeln, weil die Regel beyder ist $y^m = a^{m-1}x$. Diese letzte Regel beschreibt also unendlich viele Parabeln von niedrigerer und höherer Ordnung. Denn $y^7 = a^6x$ wäre auch die Regel für eine sogenannte Parabel. Dieß sind Redensarten, welche man verstehen muß, um die Meßkünstler lesen zu können.

Loga-

Logarithmische Gleichungen sind, in deren Gliedern logarithmen vorkommen. Z. E. $x = ly$. Exponentialgleichungen sind solche, worinnen Exponentialgrössen, das ist, die einen veränderlichen Potenzialexponenten haben, vorkommen. Z. E. $yb = a^x$, oder $= x^x$.

Zwey veränderliche Grössen sind algebraische Functionen von einander, wenn die Regelmässigkeit ihrer Zunahme und Abnahme durch eine solche algebraische Gleichung ausgedrükt werden kann, in deren Gliedern keine logarithmische oder exponentiale Grössen vorkommen dürfen. Die Sinus und Cosinus der Bogen des Zirkelkraises sind einander algebraische Functionen. Denn ihre Regelmässigkeit wird durch folgende Gleichung ausgedrükt. $\text{Sin } w = \sqrt{r^2 - (\cos w)^2}$, oder $(\text{sin } w)^2 = r^2 - (\cos w)^2$. Der Bogen und Sinus eines Winkels aber sind sich zwar einander auch Functionen, weil, wenn einer zunimmt, auch der andere zunimmt, und wenn einer abnimmt, auch der andere abnimmt. Aber eine algebraische Gleichung läßt sich nicht finden, ihre Regelmäßigkeit zu erklären. Solche Functionen nennt man transscendentisch.

Also auch, krumme Linien, deren Abscissen und Ordinaten algebraische Functionen von einander sind, heissen algebraisch; diejenigen aber, deren Abscissen und Ordinaten nur transcendentische Functionen sind, heissen transcendentische Linien.

Digitized by Google

Die Zirkellinie ist algebraisch. Denn es ist, (wenn, wie gewöhnlich, die Abscisse x, und die Ordinate y, und der Durchmesser a heißt,) $y^2 = ax - x^2$. Aber es giebt eine krumme Linie nach der Regel $1y = x$. Man nennt sie die logarithmische; diese ist transcendentisch.

§. 122.

Durch des Alphabets erste Buchstaben, a, b, c, u. s. w. werden (§. 120.) die beständigen, durch seine letzten Buchstaben, v, w, x, y, z, die unbeständigen Grössen bezeichnet, wenn beyderley soll unterschieden werden.

Der veränderlichen Grössen (oder Linien, Flächen und Räume,) unendlich kleine Zunahme oder Abnahme heißt ihr Differenzial. Zu v, w, x, y, z, sind dv, dw, dx, dy, dz, die Zeichen der Differenzialen, u. s. w.

Ein Differenzial kann gegen eine andere Grösse, die ihr Differenzial ist, als relativisch unendlich groß gedacht werden. (§. 119.) Es sey dy ein Differenzial, so ist ddy, oder d^2y das Differenzial dieses Differenzials von y, oder das zweyte Differenzial von y. So auch ddd y, oder d^3y, das dritte; d^4y das vierte, und so ferner, d^ny, das höhere Differenzial von y, in der Ordnung n.

Es ist d^2y unterschieden von dy^2, welches sicherer $(dy)^2$ geschrieben würde. Denn m sey eine unend-

Digitized by Google

unendlich grosse Zahl, (§. 118.) so ist $dy = y : m$. Und $(dy)^2 = y^2 : m^2$. Aber $d^2y = dy : m = (y : m) : m = y : m^2$. Ein ähnlicher Unterschied ist überhaupt zwischen $d^n y$ und $(dy)^n$ oder dy^n. Doch, wenn y endlich ist, so ist beydes $d^n y$ und $(dy)^n$ in gleich hoher Ordnung oder Stufe unendlich klein.

$d.(xy)$, $d.(ax)$, $d.(ax)^2$, $d.(ax + y^2)$ bedeutet das Differenzial dessen, was nach d und dem Punkte steht. So auch in andern Fällen. Also ist $d^3(ax - y^2)$ das dritte Differenzial von $ax - y^2$.

Die unveränderlichen Grössen, die nicht abnehmen und zunehmen, haben kein Differenzial. Dieß folgt aus dem Begriffe. Daher da oder $db = 0$. Und $d(y \pm a) = dy$. Wenn also $v = y \pm a$; so ist $dv = dy$, weil die Zunahme und Abnahme nur an y, dem veränderlichen Theile von v, geschieht.

In Vergleichung mit einem Differenzial heißt die Grösse, deren Differenzial es ist, das Integral.

Die Gleichheit unter zwey Integralen, (NB. wenn kein Theil derselben eine beständige Grösse ist, weil dieser Theil kein Differenzial hat,) und unter ihren Differenzialen ist mit einander verknüpft. So schließt man auch aus der Ungleichheit der Differenzialen, auf die Ungleichheit der Integralen; oder von der Ungleichheit dieser, auf die Ungleichheit jener. Denn einerley

Differenzial wird gemeiniglich mit verschiedenen algebraischen Zeichen vorgestellt; gleichwie einerley endliche Grösse oder Integral. Z. E. es ist, wie wir bald sehen werden, $d.(xy) = ydx + xdy$. Also sind ihre Integralen gleich. Jedes ist xy.

Das Integral eines Differenzials, so lange wir es noch nicht deutlicher ausdrücken können, wird durch $\int$ vor dem Differenzial angezeigt. Z. E. $\int dx = x$. Wüßte ich nicht, daß das Integral von $xdy + ydx$ das Product xy wäre; so würde ich dieß unbekannte Integral bezeichnen durch $\int (xdy + ydx)$.

Eine Grösse differenziren, heißt, ihr Differenzial setzen. Eine Grösse, welche ein Differenzial ist, integriren, heißt, ihr Integral setzen; und zwar beydes mit den verständlichsten Zeichen.

§. 123.

Hier will ich die Regeln des Differenziirens (§. 122.) kürzlich vortragen. Ich werde aber in dieser Absicht oft logarithmische Gleichungen machen, zu deren Verständniß die Absätze in der Zahlenkunst §. 128, 133, 134, die ich hier voraus setze, unentbehrlich sind. Ferner setze ich voraus, daß (der Exponent m mag positiv, oder negativ, total oder gebrochen seyn,) der Logarithmus der Zahl y in der von m benamten Potenz, oder daß $l(y^m)$ sey $= m l y$. Ist m positiv und ungebrochen, z. E. $= +3$, so erhellt es unmittelbar aus

aus der Zahlenk. §. 128. Denn $l(y^1) = 1\,ly$. Ist m ungebrochen negativ, z. E. $= (-n)$ so ist $y^m = y^{-n} = \frac{1}{y^n}$. Und $l(y^m) = l\frac{1}{y^n} = 0 - l(y^n) = -n\,(ly) = -nly$. Z. E. $l(y^{-n}) = -n\,(ly)$. Ist $m = \frac{n}{p}$, oder ein positiver Bruch, so ist $l(y^m) = l(y^{\frac{n}{p}}) = l\sqrt[p]{y^n} = (ly^n) : p = nly : p = \frac{n}{p}\,ly = mly$. Daher $l(y^{\frac{2}{3}}) = \frac{2}{3}\,ly$. Ist $m = \left(-\frac{n}{p}\right)$ oder ein negativer Bruch: so ist $l(y^m) = l(y^{-n:p}) = l\left(\frac{p}{\sqrt{y^{-n}}}\right) = (l(y^{-n})) : p = -n\,(ly) : p = -\frac{n}{p}\,ly = -mly$. Daher ist $l(y^{-\frac{2}{3}}) = -\frac{2}{3}\,ly$. Endlich setze ich voraus, aus der Zahlenk. §. 137. daß, welcherley Zahl auch y bedeute, das Differenzial ihres Logarithmus (nach dem natürlichen System) sey $= \frac{dy}{y}$. Ein Satz, worauf alles Folgende beruhet.

Nun zu den Regeln des Differenzirens.

I. Wenn §. 122. die ersten Buchstaben des Alphabets beständige Grössen bedeuten: so ist folgendes aus angeführtem Absatze klar. $da = 0$. Und $d(x) = dx$. Und $d(x \pm y) = dx \pm dy$. Und $d(-x) = -dx$. Und $d(x \pm a) = dx$.

Und $d(a-y) = -dy$. So auch in andern Fällen.

II. $d(xa) = adx$. Denn $l(xa) = lx + la$. Also die Differenzialen dieser Logarithmen $\frac{d(xa)}{xa} = \frac{dx}{x}$. Daher $d(xa) = adx$.

III. Das Differenzial $d\left(\frac{a}{x}\right) = \left(\frac{-adx}{x^2}\right)$. Denn $l\frac{a}{x} = la - lx$. Also die Differenzialen dieser Logarithmen $\frac{d(a:x)}{a:x} = \left(-\frac{dx}{x}\right)$. Also $d\left(\frac{a}{x}\right) = -\frac{dx}{x} \cdot \frac{a}{x} = -\frac{adx}{x^2}$.

IV. Das Differenzial $d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{dx}{a}$. Denn $l\left(\frac{x}{a}\right) = lx - la$. Also die Differenzialen dieser Logarithmen sind $\frac{d(x:a)}{x:a} = \frac{dx}{x}$. Daher $d(x:a) = \frac{dx}{x} \cdot \frac{x}{a} = \frac{dx}{a}$.

V. Das Differenzial des Products zweyer oder mehrer Gröſſen, ist die Summe der Producte, wenn man eines jeden Factors Differenzial, durch das Product der übrigen Factoren multiplicirt. Z. E. $d(xy) = (ydx + xdy)$. Denn $l(xy) = lx + ly$. Also ihre

ihre Differenzialen $\frac{d(xy)}{xy} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}$. Daher $d(xy) = \frac{xydx}{x} + \frac{xydy}{y} = (ydx + xdy)$. Folglich $d(xyz) = d((xy)z) = z(d(xy)) + (xy)dz = z(ydx + xdy) + xydz = zydx + zxdy + xydz$, u. s. w.

VI. Das Differenzial des Quotienten zweyer Grössen, ist die durch das Quadrat des Divisors dividirte Differenz, deren Hauptsumme das durch den Divisor multiplicirte Differenzial des Dividenden ist, und deren Abzug das durch das Dividend multiplicirte Differenzial des Divisors ist. Ich sage, $d\frac{x}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$. Denn $l\frac{x}{y} = lx - ly$. Also auch ihre Differenzialen $\frac{d(x:y)}{x:y} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}$. Also $d\left(\frac{x}{y}\right) = \left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right).\frac{x}{y} = \frac{xdx}{yx} - \frac{xdy}{y^2} = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$.

VII. Das Differenzial einer Grösse y, in einer gewissen Potenz m, (welcherley dieser Exponent m auch seyn mag,) oder $d(y^m)$, ist ein Product dreyer Factoren: 1) Des Exponenten m, 2) des y^{m-1}, 3) des dy, oder es ist $d(y^m) = my^{m-1}dy$. Denn $l(y^m) = mly$. Also sind ihre Differenzialen

Digitized by Google

findet $d(y^m) = \frac{m dy}{y^m}$. Daher ist $d(y^m) = \frac{my^m dy}{y}$ $= my^{m-1} dy$. Z. E. $d(x^2) = 2x^1 dx$. Und $d(x^4) = 4x^3 dx$. Und $d(x^{-3}) = -3x^{-4} dx = -\frac{3 dx}{x^4}$. Und $d(x^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{1}{3} \frac{dx}{x^{2:3}}$ $= \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Und $d(x^{2:3}) = \frac{2dx}{3x^{1:3}} = \frac{2dx}{3\sqrt[3]{x}}$. Endlich $d(x^{-3:4}) = -\frac{3}{4} x^{-7:4} dx = \frac{-3dx}{4x^{7:4}} = \frac{-3dx}{4\sqrt[4]{x^7}}$.

VIII. Zuweilen sind die Integralen, die man differenziren soll, zusammengesetzte und verwickelte Grössen. Alsdann muß man sich gewisser methodischer Hülfsmittel bedienen, wie in andern schweren Gleichungen, deren Glieder sehr zusammengesetzt und verwickelt sind. Z. E. Es sey zu differenziren dasjenige, welches ich kürzer v nennen will.

$(x^r - (bx - xx)^n)^m = v$. Dieß sey zu differenziren, daß dv gefunden werde.

Man benenne $x^r - (bx - xx)^n = t$. So ist $t^m = v$. Und $mlt = lv$. Und $\frac{mdt}{t} = \frac{dv}{v}$.

Folglich

Folglich $mv\,dt = dx$, und $mt^{m-1}\,dt = dv$. Und

$mt^{m-1}\,dt = dv$. Daher $mt^{m-1}\,d(x^m - bx - xx)^n = dv$.
Oder $mt^{m-1}\,(rx^{r-1}\,dx - d(bx - xx)^n) = dv$.
$mt^{m-1}\,(rx^{r-1}\,dx - (n(bx-xx)^{n-1}\,d(bx-xx)))=dv$.
$mt^{m-1}\,((r\,x^{r-1}\,dx) - (n(bx - xx)^{n-1}\,(bdx - 2xdx)) = dv$.
$m(x^r - bx - xx)^{m-1}\,((rx^{r-1}\,dx) - (n(bx-xx)^{n-1}\,(bdx - 2xdx))) = dv$.

IX. Logarithmische Grössen, worinnen Logarithmen sind, werden auf folgende Art differenzirt.

$d(lx) = dx : x$. Man sehe den Anfang dieses Paragraphen. Ferner $d(nlx) = n\,dx : x$. Ferner $d(l(1-x^2)) = d(1-x^2) : 1 - x^2 = -2xdx : (1-x^2)$. Ferner $dl(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = d.(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = d, -\frac{1}{2} \cdot -2xdx = xdx$
$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ $1-x^2$ $1-x^2$

Ferner $d(lx - l(1+x^2)^{\frac{1}{2}}) = dlx - dl(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$
$= \frac{dx}{x} - \frac{-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}.2xdx}{(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{dx}{x} - \frac{(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,xdx}{(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}$
$= \frac{dx}{x} - \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{dx + x^2dx - x^2dx}{x + x^3} =$
$\frac{d.x}{x^3+x}$ So auch in andern Fällen.

X.

X. Exponentialgrössen, deren Exponent unbestimmt ist, werden gleichfalls durch Hülfe der Logarithmen differenzirt. Z. E. $d(b^x) = b^x \, l b \, dx$. Denn $\frac{d(b^x)}{b^x} = d\,l(b^x)$. Also $d(b^x) = b^x \cdot (d\,l(b^x)) = b^x \, d(x\,l b) = b^x \, l b \, dx$. Ferner $d(x^y) = x^y \, l x \, dy + x^{y-1} \, y \, dx$. Denn $\frac{d(x^y)}{x^y} = d\,l(x^y)$. Also $d(x^y) = x^y \, d\,l(x^y) = x^y \, d(y\,l x) = x^y \cdot (y \, d\,l x + l x \, d y) = x^y \cdot (\frac{y\,dx}{x} + l x \, dy) = x^y \cdot (y\,dx + x\,l x\,dy) = x^{y-1} \cdot y\,dx + x\,l x\,dy = x^{y-1} \, x\,l x\,dy + x^{y-1} \, y\,dx = x^y \, l x\,dy + x^{y-1} \, y\,dx$. So auch in andern Fällen.

Ferner, es werde gesucht das Differenzial $d(a^{a^x})$. Es sey aber a die Zahl, deren Logarithmus $l a = 1$ ist. Dieses $d(a^{a^x})$ ist das Dividend in dem Differenzial des Logarithmus $d\,l(a^{a^x})$. Denn dieser Logarithmus ist $d\,a^{a^x} : a^{a^x}$. Also $d\,a^{a^x} = a^{a^x} \, d\,l a^{a^x} = a^{a^x} \, d(a^x l a) = a^{a^x} \, d(a^x) \cdot l$ (und weil $\frac{d.a^x}{a^x} = d.l a^x$) $= a^{a^x} \, a^x \, d\,l(a^x) = a^{a^x} \, a^x \, d(x\,l a) = a^{a^x} \, a^x \, dx$. So auch in ähnlichen Fällen.

XI. Will man Grössen, die schon Differenzialen sind, weiter differenziren, (nämlich diejenigen, die man als unbeständige Differenzia-

len

len voraussetzt,) so sind die Regeln dieselben, als bey dem Differenziren endlicher Grössen. Es ist zu merken, daß das Differenzial dx der Abscisse x, mehrentheils als einerley oder beständig, ohne Zunahme oder Abnahme, also als nicht differenzirbar angenommen wird.

Exempel. Es ist $d(ydy) = y\,d^2y + (dy)^2$. Und $d(y:dy) = \frac{(dy)^2 - y\,d^2y}{(dy)^2}$. Und $d(dy)^2 = 2\,dy\,d^2y$. Und $d(1:dy) = -d^2y:(dy)^2$. Aber wenn dx als beständig angesehn wird; so ist $d(ydy:dx)$ oder $d(ydy).dx^{-1} = (dx)^{-1}.d(ydy))$ $= (dx)^{-1}.y\,d^2y + (dy)^2 = \frac{y\,d^2y + (dy)^2}{dx}$.

Daß aber die zweyten und höhern Differenzialen aus dem nächsten niedrigern nach eben den Regeln gemacht werden müssen, wie aus der endlichen Grösse das erste Differenzial, dieses erhellet daher, weil ein Differenzial sowohl, als eine endliche Grösse, einen Logarithmen hat, der differenzirt werden kann, und aus dessen Differenzial die Form des von neuen zu differenzirenden Differenzials folget.

XII. Auch unmögliche Grössen, besonders logarithmische, (Zahlenk. §. 74.) findet man zuweilen Ursache, zu differenziren.

Zum

Digitized by Google

Exempel zur Uebung: Es werde gesucht dv, und v sey $= l((x\sqrt{-1}) + (\sqrt{1-x^2}))^1 : \sqrt{-1}$
$= \frac{1}{\sqrt{-1}} l((x\sqrt{-1}) + \sqrt{1-x^2})$. No. 1. Man setze $x\sqrt{-1} = z$; folglich $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1+z^2}$. So ist $v.\sqrt{-1} = l(z+\sqrt{1+z^2})$. No. 2. Also differenzirt

$$\sqrt{-1}.dv = \frac{dz + (\frac{1}{2}(1+z^2)^{-\frac{1}{2}} . 2z dz)}{z+\sqrt{1+z^2}}$$

No. 3. Also ist $\sqrt{-1}.dv$

$$= \left(\frac{dz}{z+\sqrt{1+z^2}} + \frac{z\,dz}{(z+\sqrt{1+z^2})\sqrt{1+z^2}}\right)$$

$$= \left(\frac{(\sqrt{1+z^2} + z).dz}{(z+\sqrt{1+z^2})\sqrt{1+z^2}}\right)$$

$= (dz : \sqrt{1+z^2}) = (dz : \sqrt{1-x^2})$ nach No. 1.

Also unmittelbar $\sqrt{-1}.dv = \frac{dz}{\sqrt{1-x^2}}$

Daher $\sqrt{-1}.dv = \frac{\sqrt{-1}.dx}{\sqrt{1-x^2}}$ nach No. 1.

Endlich $dv = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

§. 124.

Die Regeln des Integrirens (§. 122.) sind folgende:

I.) Was mit etwas Beständigen (welches C, oder Constans heißt,) nicht in das Differenzial kömmt,

dünnt, (indem es als ein Theil in dem Integrale war), so ist das Integral, oder $\int dx = x \pm c$. Es ist aber c zuweilen $= 0$, nämlich wenn das differenzirte Integral aus lauter unbeständigen Theilen bestand. Ferner $\int (dx \pm dy) = (x \pm y) \pm c$. Und $\int (y dx + x dy) = xy \pm c$. Und $\int \frac{(y dx - x dy)}{y^2} = \frac{x}{y} \pm c$. Dieß sind die leichtesten Regeln. Das Integral ist nämlich dasjenige, woraus nach den Regeln des Differenzirens (§. 123.) ein solch Differenzial wird, als man integriren soll.

II.) Ist das Differenzial also ein Product 1) aus bekannten Grössen, (aber 1 ist ein verborgener Factor,) 2) aus einer endlichen unbekannten Grösse in irgend einer Potenz m, 3) aus dem ersten Differenzial der unbekannten Grösse, wie $(b)(x^m)(dx)$; so war vor der Differenzirung der Exponent des x nicht m, sondern $m+1$; das dx aber fehlete; und in der bekannten Grösse b steckt der Factor $m+1$, der vor der Differenzirung nicht war, (man sehe §. 123. VII.) Also muß man die bekannte Grösse durch $m+1$ dividiren, den Exponenten m in $m+1$ verwandeln, und dx weglassen, um das Integral $\int (bx^m dx) = \frac{bx^{m+1}}{m+1} \pm c$ zu machen.

III.) Nach derselben Regel findet man die Integralen, wenn in den Differenzialen die unbekannten Grössen mit bekannten vermischet sind. Zum Exempel, $\int (+y\,dy \pm (v \pm y = \sqrt{(b^2 - y^2)} = \int (b^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-y\,dy) = \int (b^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2} y\,dy\right) = \int \frac{1}{2} (b^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2y\,dy)$ $= (b^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(b^2 - y^2)} \pm c$.

IV.) Was das beständige c sey, das man zufügen muß, wird gemeiniglich aus den Umständen geschlossen, in welchen das Differenzial und Integral gemacht ist. In einigen Umständen hilft folgende Denkart. Es sey das Integral, ehe man $\pm c$ hinzugefügt hat, $= \tau$, und also das ganze Integral $\tau \pm c$. Wenn τ gewisse Theile hat, 1) solche, die Nulle werden, wenn man die unbeständigen Grössen für Nulle annimmt, (als welches ohne Abbruch der Wahrheit des Integrals immer geschehen kann,) 2) solche Theile, die alsdann nicht Nulle werden; so gehöret dieser letzte Theil besonder zweifel zu c, und wird in manchen Fällen dem $\pm c$ für gleich erkannt. In diesen Fällen also ist, wenn man die Theile der ersten Art, welche ich $= t$ nennen will, wegläßt, $\tau - t \pm c = 0$. Also $\tau - t = \pm c$, wodurch man c finden kann. Es sey zum Exempel das ganze

In

Integral $r \pm c = \sqrt{b^2 - y^2} \pm c$; so ist $r - c = \sqrt{b^2} = \pm b$. Also $+b = +c$. Und das ganze Integral $\sqrt{b^2 - y^2} \pm c$ ist $\sqrt{b^2 - y^2} \pm b$.

V.) Wenn man sich aus dem Vorigen (§. 23.) erinnert, wie unähnlich, die in Ordnung gebrachten Differenzialen, ihren Stammgrössen werden; so wird man die Schwierigkeit empfinden, in solchen verwickelten Exempeln, das Integral zu dem Differenzial zu suchen. Man muß viel Uebung haben und viel Arbeit anwenden, um zu finden, daß z. E. $\frac{a\,a\,dx}{x\sqrt{(ax+xx)}}$ das Integral $\frac{-2a\sqrt{(ax+xx)}}{x}$ giebt. Dieß zu sehn muß man vielerley methodische Zwischengleichungen machen.

No. 1.) Man setze $\sqrt{(ax+x^2)} = zx : b$; so folgt, wenn man quadrirt, daß $x = ab^2 : (z^2 - b^2)$. Also nach den Regeln der Differenzierung ist $dx = \frac{-2ab^2 z\,dz}{(z^2-b^2)^2}$. Und daher ist der Zähler des Differenzials $a^2\,dx = \frac{-2a^3 b^2 z\,dz}{(z^2-b^2)^2}$.

No. 2.) Und der Nenner ist $x\sqrt{(ax+x^2)} = \frac{ab^2}{z^2-b^2} \cdot \frac{zx}{b}$ (nach No. 1.) $= \frac{ab^2}{z^2-b^2} \cdot \frac{z(ab^2)}{b(z^2-b^2)} = \frac{a^2 b^3 z}{(z^2-b^2)^2}$.

Digitized by Google

No. 2.) Also $\frac{a^2 dx}{x\sqrt{(ax+x^2)}} = +\frac{2a^3b^2zdz}{(z^2-b^2)^2}$

$\frac{a^2b^3z}{(z^2-b^2)^2}$ (nach No. 1 und 2.) $= \sqrt{\frac{2a^3b^2zdz}{a^2b^3z}}$

$= \frac{2adz}{b}$.

No. 4.) Es ist aber nach den Regeln der Integrirens $\int \frac{2adz}{b} = \frac{2az}{b}$.

No. 5.) Aber nach No. 1. ist $\sqrt{ax+x^2} = \frac{zx}{b}$.

Also $z = \frac{b\sqrt{ax+x^2}}{x}$. Also $\int \frac{a^2dx}{x\sqrt{(ax+x^2)}} = \int \frac{2adz}{b}$

(nach 3) $= \frac{2az}{b}$ (nach 4) $= \frac{2a}{b} \cdot \frac{b(\sqrt{ax+x^2})}{x}$

(nach dem Werthe des z) $= \frac{2a\sqrt{ax+x^2}}{x}$

das gesuchte und schwer zu findende Integral.

Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ sey lz, (wenn $z = \sqrt{(x^2-a^2)}+x$, oder daß es sey $l(\sqrt{(x^2-a^2)}+x)$.

VI.) Alles kömmt darauf an, daß man zum voraus wisse, oder errathe, oder versuche, welche Substitution anderer Grössenzeichen für diejenigen, die man schon hat, den Zweck befördern werden. Z. E. Nach einer Erfindung des Herrn D. Clemms kann man aus der

Gleichung $y\,dx - x\,dy = a\sqrt{((dx)^2 + (dy)^2)}$ die Gröſſe y (oder y in der Function x) finden.

1) Man ſetze: $dy : dx = p$, oder $dy = p\,dx$. So iſt die Gleichung folgende: $y\,dx - x\,p\,dx = a\sqrt{((dx)^2 + p^2(dx)^2)}$, oder $y\,dx - x\,p\,dx = a\sqrt{(1+p^2)(dx)^2} = a\,dx\sqrt{1+p^2}$. Ferner (durch dx dividirt,) iſt $y - xp = a\sqrt{1+p^2}$, oder $y = a(\sqrt{1+p^2}) + xp$.

2) Alſo nach abermaliger Differenzirung iſt das dy oder $p\,dx = \frac{a\,p\,dp}{\sqrt{1+p^2}} + x\,dp + p\,dx$. Daher $x\,dp = -\frac{a\,p\,dp}{\sqrt{1+p^2}}$, und $x = -ap : \sqrt{1+p^2}$.

3) Durch dieſen Werth des x wird y, oder (nach 1) $a(\sqrt{1+p^2}) + xp = a(\sqrt{1+p^2}) + \left(\frac{-ap}{\sqrt{1+p^2}}\right)p = \frac{a}{\sqrt{1+p^2}}$. Alſo da $x = \left(\frac{-ap}{\sqrt{(1+p^2)}}\right)$ und da $y = \left(\frac{a}{\sqrt{1+p^2}}\right)$ iſt $x : y = -p$. Oder $p = -\frac{x}{y} = -(x:y)$. Daher $y = a : \sqrt{1+x^2}$. Folglich $y^2 = a^2 : (1+x^2)$. Daher $1 = a^2 : (y^2 + x^2)$. Folglich $y^2 + x^2 = a^2$. Oder $y^2 = a^2 - x^2$. Folglich das geſuchte In-

tegral $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. In diesem Exempel differenzirte man das Gefundene von neuem, um zum Zwecke zu kommen.

VII.) Es ist denen, die im Integriren sich üben, oder arbeiten wollen, nützlich, zu wissen, daß ein Differenzial folgender Form $(a + bx^n)^p (x^m dx)$ alsdann vollkommen integrirt werden könne, wenn $\frac{m-(n-1)}{n}$ oder kurz, wenn ein diesem Quotienten gleiches r, eine endliche, positive Totalzahl ist. Denn alsdann betrachte man $m = nr + (n-1)$. So ist $(a+bx^n)^p (x^m dx)$, oder das obige Differenzial, $= (a + bx^n)^p (x^{nr+n-1} dx) = (a+bx^n)^p x^{nr} x^{n-1} dx$. Man nenne $(a+bx^n) = z$; so ist $x^n = (z-a) : b$, und so ist $dz = nbx^{n-1} dx$; daher $x^{n-1} dx = dz : nb$.

Daher wird jenes zu integrirende Differenzial folgendes: $z^p \cdot \left(\frac{z-a}{b}\right)^r \cdot \frac{dz}{nb} = z^p \cdot \frac{(z-a)^r}{b^r} \cdot \frac{dz}{nb} = (z-a)^r \cdot \frac{dz \cdot z^p}{nb^{r+1}}$. Dieses $(z-a)^r \frac{z^p dz}{nb^{r+1}}$ wenn r die gesagten Beschaffenheiten hat, giebt eine endliche Reihe, deren Integral sich durch z, folglich durch $a + bx^n$ ausdrücken läßt. Diese Reihe ist also das Integral von $(a+bx^n)^p (x^{nr}) x^{n-1} dx$, folglich von $(a + bx^n)^p x^{nr+n-1} dx$, folglich von $a+bx^n \cdot (x^m dx)$.

VIII.)

VIII. Differenziren kann man alle Größen, die vorkommen, ob es gleich oftmals schwer ist, den kürzesten und verständlichsten Ausdruck eines Differenzials zu schaffen, oder die Einerleyheit der Bedeutungen bey verschiedenem Ausdrucke eben desselben Differenzials einzusehn. Aber integriren kann man nicht alles, theils wegen Schwierigkeit, theils wegen einer ähnlichen Unmöglichkeit, als sich bey Ausziehung der Wurzeln findet, wobey man sich zuweilen mit Annäherungen oder unendlichen Reihen behelfen muß.

§. 129.

Genug, und vielleicht etwas zu viel, von dieser Art zu einem Vorschmacke. Jetzt will ich einigen Gebrauch der Differenzialrechnung zeigen.

Bey allen krummen Linien, (wenn ich, wie gewöhnlich, Fig. 133. §. 117. die Abscisse AP, die Ordinate PM, die Tangente Tt, die Normale Hm, die Subtangente pT, die Subnormale Hp bezeichne,) ist Folgendes wahr:

1) Die Subtangente bey krummen Linien, oder $pT = \frac{y\,dx}{dy}$. Denn wenn p und p unendlich nahe bey einander sind, wenn folglich die Abscissen Ap und Ap (oder x und x + dx) nur um ein unendlich Kleines, um ein dx, oder um pp verschieden sind: so sind die Ordinaten Mp und

und mp, oder y und y, auch nur um ein dy, (welches mR ist,) verschieden; so darf man den unendlich kleinen Theil von der krummen Linie für gerad halten; und so ist, nach der gewöhnlichen Lehre von ähnlichen Triangeln, mR:Rm = mp:pT; ferner, (wegen des unendlich kleinen Unterschiedes, §. 119.), ist mR:Rm = mp:pT, oder, (wegen Gleichheit der für einander gesetzten Dinge,) ist dy:dx = y:pT, oder die Subtangente $pT = \frac{ydx}{dy}$.

2) Ferner, bey allen krummen Linien ist die Subnormale $Hp = \frac{ydy}{dx}$, denn die Normale Hm steht auf der Tangente Tt rechtwinkelicht. Die Dreyecke mRm, und Hpm, sind ähnlich. Also auch die Dreyecke mpT und Hpm. Also (mR):(Rm) = (mp):(pH). Oder dx:dy = mp:pH = mp:pH, nämlich, §. 119., wegen des unendlich kleinen Unterschiedes zwischen mp und mp, und zwischen pH und pH, oder zwischen der beyden Subnormalen der beyden Punkte (in der krummen Linie) m und m. Daher dx:dy = y:pH. Also ist die Subnormale $pH = \frac{ydy}{dx}$.

3) Das

3) Das Differential der Fläche Amp A, (welche von Am, einem Bogen einer krummen Linie, (Fig. 153.) von der Ordinate dieses Punkts m, das ist, von my, oder von y, und von der Abscisse Ap, oder x, auf der Axe umgränzt wird,) ist der Raum ppmmp, welcher, (weil die Linien pp und Rm, und mm unendlich klein sind,) nach der schon bekannten Einerleyheit der Benennungen ist $ydx + \frac{1}{2}dydx = ydx$, gegen welches (§. 118.) das Weggelassne relativisch unendlich klein ist. Also ist $\int(ydx)$, nach §. 124. oder das Integral von ydx, der gesagte Raum, welchen ich S nennen will. Kann man also ydx integriren, so ist die Grösse der Fläche S gefunden, das ist, so hat man die Quadratur dieses Bogens, (§. 117.), woraus man hernach auf grössere und kleinere Bogen derselben Linie weiter schliessen kann.

4) Die umgekehrte Methode nennt man die Kunst, aus gegebnen Subtangenten und Subnormalen, u. s. w. (§. 117.) die Regel oder reguirende Gleichung einer krummen Linie (§. 120. 121.) zu finden. Es geschieht durch Integrirung. Z. E. Es wird bekannt, die Subtangente, welche ist (No. 1.) $= ydx.dy$ sey $= 2y^2 : a$. So ist $adx = 2ydy$. Und integrirt $ax = y^2$, die Regel der Linie. Eben so findet man aus der Subnormale (No. 2.) $= ydy : dx = a$, Folgendes:

$\frac{1}{2}y^2 = px$, oder $y = \sqrt{px}$, die Regel einer krummen Linie.

f) Ein ähnlicher Gebrauch der Differenzialrechnung ist bey den Cubiren der Körper, (§. 117.). Ein Abschnitt der Kugel, (wenn die Axe D, die Abscisse x, die Ordinate y, und π D der Umkreis ist,) hat nach geometrischen Gründen das Differenzial, welches ist $\frac{1}{2}\pi xy \cdot y = \frac{1}{2}\pi y^2 dx = \frac{1}{2}\pi(Dx - x^2)dx = \frac{1}{2}\pi Dx\,dx - \frac{1}{2}\pi x^2 dx$. Also nach Integrirung des Differenzials ist der Abschnitt $\frac{1}{2}\pi Dx^2 - \frac{1}{3}\pi x^3$. Und wenn $x = \frac{1}{2}D$, und wenn folglich der Abschnitt die Halbkugel ist, so ist der Inhalt $= \frac{1}{2}\pi D \cdot \frac{1}{4}D^2 - \frac{1}{3}\pi \frac{1}{8}D^3 = \frac{1}{12}\pi D^3$. Also die ganze Kugel $\frac{1}{6}\pi D^3$, wie oben §. 95. schon erwiesen ist. Auf eine ähnliche Art findet man den Inhalt des Kegels, wenn die Höhe, der Diameter der Grundfläche D heißt, so ist seines Inhalts Differenzial $= dh \cdot \frac{1}{4}\pi D^2$ aus geometrischen Gründen. Es sey $h = \frac{1}{4}D$, so ist jenes Differenzial $\frac{1}{4}\pi D^2 \cdot \frac{1}{4}dD$, und das Integral $\frac{1}{16}\pi D^3 f$, oder (weil $f = h : D$) $= \frac{1}{12}\pi D^2 h = \frac{1}{12}\pi D^2 \cdot h$.

das

das ist die Grundfläche, multiplicirt mit dem Drittheil der Höhe.

6) Auch die Rectificirung krummer Linien (§. 117.) oder ihrer Bogen, geschieht durch Differenziren und Integriren. Wenn (Fig. 153.) der Bogen $Am = b$ genannt wird, so ist $mm = db = \sqrt{(mR)^2 + (Rm)^2} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. Wenn nun der Satz $y^2 = ax$ die Regel einer krummen Linie ist, (die man eine Parabel nennt,) so ist $dx = 2ydy : a$, und $(dx)^2 = 4y^2(dy)^2 : a^2$. Daher ist das Differenzial des Bogens, oder db,

$$= \sqrt{(dy)^2 + \frac{4y^2(dy)^2}{a^2}} = \sqrt{(dy)^2 \cdot \left(\frac{a^2 + 4y^2}{a^2}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 + 4y^2}{a^2}} \cdot dy, \text{ oder (nach dem binom. Satze)}$$

$$= \left(a + \frac{2y^2}{a} - \frac{2y^4}{a^3} + \frac{4y^6}{a^5} \text{ (und so weiter,)}\right) \cdot \frac{dy}{a}.$$

Diese unendliche Reihe ist das Differenzial db des Bogens Am. Das Integral des db, oder dieser unendlichen Reihe, ist die unendliche Reihe

$$= y + \frac{2y^3}{3a^2} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6}, \text{ u. s. w.}$$

oder die Länge des Bogens Am, von deren nächstgen Ausdrucke man immer mehr hinzu fügen kann, ob man gleich nie zu Ende kömmt.

§. 126.

§. 126.

Unter der Gattung der unbeständigen Grösen, giebt es zweyerley Kleinstes und zweyerley Grösstes. Die erste Art ist, wenn der Punkt, wo das Grösste oder Kleinste ist, nach der Regul oder Gleichung der Functionen (§. 121.) das Erste oder das letzte der zunehmenden oder abnehmenden Sache seyn muß, wie im Zirkel von den unendlichkleinen Ordinaten an den beyden Endpunkten der Axe, die eine die erste, die andre die letzte ist, und beyde an ihrem Orte die kleinsten sind. Wäre aber eine andre dieser Axe parallele Axe, ausser dem Kraise, die linke der Abscissen; so würden in dieselben zwey Punkte des Umkraises die zwey äußersten grösten Ordinaten fallen. Die zweyte Art des Grösten, ist an beyden Seiten kleinern Dingen seiner Art benachbart, wie die grösste Ordinate des Zirkels, welche durch den Mittelpunkt der Axe geht. So gehört auch zu der andern Art dasjenige Kleinste, welches an beyden Seiten etwas Grössers hat, wie die Ordinate des Berührungspunktes an der erhabnen Seite eines Zirkels, wenn die Aussenaxe parallel mit der Tangente ist. Man unterscheide also das Kleinste und Grösste an den Gränzen, von dem Grösten und Kleinsten in der Mitte. Beyderley Art des Grösten und des Kleinsten aber kann man wieder abtheilen, nämlich erstlich in das Grösste oder Kleinste an seinem Orte, nur in Vergleichung mit den nächsten Dingen, und zweytens in das Grösste oder Kleinste über Alles.

Die

Die Ordinate an einem der Endpunkte der Axe ist das Kleinste an seinem Orte, weil der andere Endpunkt der Axe auch eine solche Ordinate hat. Aber die Ordinate des Mittelpunkts ist das Gröſte über alle Ordinaten im Zirkel.

Ich will noch einige Exempel vom Gröſten und Kleinsten geben. 1) Wenn von zweyen Zahlen, deren Summe gegeben wird, (z. E. 20,) das gröſte Product, y, soll gemacht werden; so muß x, (das ist, einer der Factoren, (der andre mag z heissen,) die Hälfte von der gegebenen Zahl a (oder in unserm Falle halb zwanzig, oder 10) seyn. Alsdann wird das Product $yz = 100$, weil in diesem Falle der andre Factor z, der mit x zugleich 20 macht, gleichfalls 10 ist. Und dieses Product xz, oder diese Function y, ist das Gröſte, weil, wenn die Function x unter oder über 10 angenommen wird, in beyden Fällen, das Product kleiner, als 100, bleibt.

2) Das gröſte Triangel unter allen, die im Zirkel Raum haben, ist der, dessen Höhe $\frac{2}{3}$ der Axe ist. Sowohl, wenn die Höhe gröſser oder kleiner wird, wird der Triangel kleiner. 3) Der Kegel, der sowohl am Inhalte, als an krummer Oberfläche, der gröſte in einer Kugel ist, hat $\frac{2}{3}$ der Axe zur Höhe. 4) Wenn y und x unter einander Functionen sind, z. E. wenn $y = 4x^3 - 4x^2$; so ist y das Gröſte, wenn $x = \frac{2}{3}$ ist. Wenn aber $y = 4x^4 - 3x^2$

Axe ist:

ist; so ist $\pm \frac{1}{4}$, oder $\pm \frac{1}{8}$ das grösste und kleinste.
5) Die kleinste Oberfläche von allen Parallelepipedis eines festgesetzten körperlichen Inhalts, hat der Würfel. 6) Von einem gegebenen Punkte ausser einer Zirkelfläche, bis in den Kreis, ist die kürzeste Linie diejenige, deren Richtung nach dem Mittelpunkte geht.
7) Aus einem gegebenen Punkte, in der Axe, bis in irgend einen Punkt der krummen Linie, ist die Normale (§. 117.) unter allen die kürzeste Linie.

Wenn in der Gleichung, die zur Regel dienet, y und x unter einander Functionen sind; so wird y allemal mit x verändert, und zwar auf folgende Arten: 1) x und y nehmen mit einander sowohl zu als ab; sie wachsen beyde, entweder ins Unendliche, oder bis an eine, aus der Gleichung erkennbare, Gränze. Alsdann nenne ich die Functionen übereinstimmend, wie die Ordinate und Abscisse in einem Quadranten, wenn die Abscisse von dem Bogen anfängt, und bis in den Mittelpunkt wächst. 2) y nimmt ab, wenn x zunimmt, und nimmt zu, wenn x abnimmt, entweder ohne Aufhören, oder bis an eine gewisse Gränze. Diese Functionen nenne ich widrig, wie y und x in dem Quadranten, wenn x bey dem Mittelpunkte anfängt. 3) y und x sind anfangs übereinstimmend, bis x einen gewissen Punkt erreicht. Hernach aber werden sie widrig. Solche Functionen nenne ich doppelartig, wie y

und

und x in einem ganzen Zirkelumfang, so wird der größte oder kleinste Functionen finden, wenn man aus der Grundgleichung hervor sehen, ob die Functionen einstimmig, oder widrig, oder doppelartig sind.

Die beständig einstimmigen Functionen haben kein mittleres Größte oder Kleinste; sondern, wenn sie beyde endlich sind, (wie die Abscisse und Ordinate eines Quadranten,); so hat der Anfangspunkt des x, (welcher für $x = 0$ angesehn wird,) die kleinste Ordinate $= 0$, und der Endpunkt des x hat die größte, nämlich $= x = r$. Kann x unendlich fortgehn, aber nicht negativ werden; so ist auch y nicht endlich, aber beyde haben einen Anfang. Zum Exempel, wenn $y^2 = ax$; so kann x nicht negativ seyn, weil $y = \sqrt{-ax}$ unmöglich ist. Aber x und y können ohne Aufhören grösser werden. Weil das Unendliche, oder ∞, etwas Unbestimmtes bedeutet; so kann man in solchen Fällen sagen, das größte y und das größte x sey unendlich, oder $= \infty$. In der logarithmischen Gleichung $ly = \frac{1}{a}x$, oder $lx = x$, (wenn $la = 1$ ist,) können ly und x positiv und negativ unendlich fortgehn. Nach der Exponentialgleichung aber $y = a^x$, kann zwar x positiv und negativ unendlich fortgehn. In ersten Falle schreitet alsdann y auch ins Unendliche fort. Aber im letzten Falle wird x nicht negativ, sondern nur ein allezeit kleiner werdender Bruch. Im Zirkel kann x nicht grösser werden, als a, weil auch der Regel $y = \sqrt{ax - x^2}$, nemlich

sonst die unmögliche Quadratwurzel einer negativen Größe verlangt würde. Und weil a die Are ist, so hat x stets zu Anfang und Ende, und kann also nicht negativ werden. Diese und ähnliche Betrachtungen stellt man an, ehe das Größte und Kleinste einer Function untersucht wird.

Wenn nach der Grundgleichung der Functionen y und x ein für etwas Gewisses angenommenes x so beschaffen ist, daß (wenn p irgend etwas noch so kleines Positives bedeutet,) sowohl die Verwandlung des x in x + p, als in x — p; das ist, sowohl in x + dx, als in x — dx, die Function y in beyden Fällen entweder vergrössert, oder in beyden Fällen verkleinert, so muß das zu diesem x gehörige y im ersten Falle an seinem Orte das Kleinste, im zweyten Falle das Größte seyn. Niemals ist y weder das Größte noch das Kleinste, wenn das Gesagte nicht aus der differenzirten Grundgleichung erhellt. Wenn wir nun die, durch Setzung des x + dx für x an y gewirkte, Veränderung, das positive dy, hingegen die, durch Setzung des x — dx für x an y gewirkte, Veränderung das negative dy nennen; so muß, (wenn bey einem solchen x das y soll entweder das Größte oder das Kleinste seyn können,) die Differenz des positiven und negativen dy der Nulle gleich seyn. Es bestimmt aber diese Differenz, wenn man das relativisch Unendlich-Kleine daraus weg löst, die Stelle entweder des positiven

positiven oder von a negativen dy. Daher kömmts, daß die Wahrheit, $dy = o$, allemal Statt findet, wenn ein solches x, als daraus folgt, die Bedingung eines größten oder kleinsten y ist. Aber die Setzung des $dy = o$, oder des $\frac{dy}{dx} = o$, giebt zuweilen ein solches x zu erkennen, welches mehr als eine Bedeutung oder Wurzel hat. Alsdann erhellt daraus, daß zwar die Annehmung einer jeden möglichen Wurzel des x mit einem solchen y verbunden sey, welches zwischen $y + dy$, und zwischen $y - dy$, welche unmittelbar an dieß y gränzen, entweder das Kleinste oder Größte (an seinem Orte) ist. Aber das größte oder kleinste y über alle y, erhellt daraus noch nicht. Sondern in diesen Fällen muß man das (absolute) Größte oder Kleinste, auf eine mühsamere Art durch höhere Differenzialien, oder auch durch Vergleichung derer Wurzeln des y suchen, davon eine jede an ihrem Orte das Kleinste oder das Größte ist. Doch dieses würde zu weit führen. Ich will bey denen Exempeln bleiben, wo der Augenschein lehrt, daß nur bey Annehmung einer einzigen Grösse für x, ein größtes oder kleinstes y bestimmt werde.

Digitized by Google

Nun folgen berechnete Exempel, aus $\frac{dy}{dx} = 0$, oder aus $dy = 0$.

1) Das größte oder kleinste y bey der Regel zu suchen $y = (a - x)x$. Oder $y = ax - x^2$. Also $dy = adx - 2xdx = 0$. Also $a = 2x$, das ist, $x = \frac{1}{2}a$. Also wo $x = \frac{1}{2}a$, da ist $y = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}$, und zwar das größte y, weil, wenn p irgend etwas Positives bedeutet, durch die Voraussetzung daß $x = \frac{1}{2}a \pm p$ sey, die Grundgleichung ($y = ax - x^2$) in die Gleichung $y = ax \pm ap - \frac{a^2}{4} \mp ap - p^2$ verwandelt, und y um p^2 kleiner würde, als vorher, da es $\frac{a^2}{4}$ war. Also wird das x, welches $\frac{a}{2}$ ist, zur Bedingung des größten y.

2) Das größte oder kleinste y zu suchen bey der den Zirkel beschreibenden Regel $y = \sqrt{ax - x^2}$. Es ist $dy = 0 = \frac{adx - 2xdx}{2(ax - x^2)^{\frac{1}{2}}}$ Also abermals $x = \frac{1}{2}a$. Bey $x = \frac{1}{2}a$ ist y das größte, weil nach dem ersten Exempel durch beyderley Veränderung des x, (nämlich $x = \frac{1}{2}a \pm p$) die Wurzel, welche dem y gleicht, oder das y selbst verringert würde.

3) Den größten Triangel innerhalb des Zirkels zu suchen. (Fig. 155.) Er heisse z; seine

seine Grundlinie nenne man $2y$, oder $n..n$, seine Höhe aber x oder pm. Es ist $2y$, oder $n,.n$, eine Sehne. Den Theilungspunkt der Hälften dieser Sehne nenne man p, und m sey der Punkt in der Peripherie, wo die Spitze des Triangels seyn soll. Es muß mp rechtwinkelicht stehen. Denn jeder anderer Punkt in der Peripherie würde eine kleinere Höhe, ein kleiner x geben. Also ist der Triangel z gleichschenkelicht. Ferner, weil die beyden Neben-Triangel gleich sind; so ist der ganze Triangel z das Größte, wenn der halbe Triangel, folglich wenn $yx:a$, folglich wenn yx oder np. pm das Größte ist. Also sey $d(yx)=o$. Folglich $xdy+ydx=o$. Aber (nach der Gleichung des Zirkels) $y=\sqrt{ax-x^2}$. Also $dy=\frac{(\frac{1}{2}a-x)\,dx}{(ax-x^2)^{\frac{1}{2}}}$. Daher $\frac{(\frac{1}{2}ax-x^2)dx}{(ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ $+(ax-x^2)^{\frac{1}{2}}dx=o$. Also $1\frac{1}{2}ax-2x^2=o$, Daher $3ax-4x^2=o$. Folglich ist $x=\frac{3}{4}a$. Das ist, die Abscisse oder mp muß $\frac{3}{4}$ des Durchmessers seyn, wenn z in dem Zirkel der größte Triangel seyn soll. Also ist die Ordinate y oder $np=\sqrt{\frac{3a^2}{4}-\frac{9}{16}a^2}=\sqrt{\frac{3}{16}a^2}=\frac{1}{4}a\sqrt{3}$. Daher die Grundlinie des ganzen Triangels $2y=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Das Quadrat aber des Schenkels, oder der Linie $s=mn$, oder s^2 ist $=x^2+y^2$, oder $\frac{9}{16}a^2+\frac{3}{16}a^2$ $=\frac{3}{4}a^2$. Also ist der Schenkel $s=\frac{\sqrt{3a^2}}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}a\sqrt{3}$, so groß, als $2y$, oder als die ganze Grundlinie.

Digitized by Google

Daher ist der grösste Triangel im Zirkel gleichseitig.

4) Den Kegel z des grösten Inhalts in der Kugel zu suchen. Nach geometrischen Gründen muß alsdann $\frac{1}{3} . x . 2y\pi . \frac{1}{2}y$ oder $\frac{1}{3}xy^2\pi$, folglich xy^2, also $x.(ax - x^2)$ oder $ax^2 - x^3$ das Grösste seyn. Also das Differenzial $(2ax - 3x^2)dx = 0$. Folglich $\frac{2a}{3} = x$.

5) Unter allen Parallelepipedis, an Inhalt a^3, das zu finden, was die kleinste Oberfläche p hat. Es ist unmittelbar gewiß, daß die Seitenflächen auf der Grundfläche rechtwinkelicht seyn müssen. Wenn also die Höhe h, die Grundfläche g, und zwey Seiten der Grundfläche l und f heissen; so ist die gesuchte Fläche $p = 2g + 2fh + 2lh$. Wenn g kein Quadrat wäre; so wäre, (bey gleicher Grösse der Grundfläche,) $f + l$, folglich $fh + lh$ grösser. Also ist g ein Quadrat, und folglich $f = l$. Also besteht die Fläche p aus $2l^2 + 4lh$. Und der Inhalt ist $l^2h = a^3$. Daher $h = \frac{a^3}{l^2}$. Folglich ist die Fläche $p = 2l^2 + 4l\frac{a^3}{l^2} = 2l^2 + \frac{4a^3}{l}$. Das Differenzial davon ist $4ldl - \frac{4a^3}{l^2}.dl$. Ist dieses $= 0$; so ist $4l^3 = 4a^3$; folglich $l = a$. Und weil der Inhalt $l^2h = a^3$, und weil folglich $a^2h = a^3$; so ist $h = a = l$. Daher ist die Parallepipedum ein Würfel.

6) Die

Digitized by Google

6) Die kleinste Linie von einem gegebenen Punkte h in der Axe bis in die krumme Linie (Fig. 153.) zu suchen. Es sey L die gesuchte Linie; es heisse, wie gewöhnlich, x die Abscisse, y die Ordinate des Puncts m in der krummen Linie, der gesucht wird; Ah aber heisse c. So ist (nach dem Pyth. Satze) $L^2 = (c - x)^2 + y^2$, welches, wie das gesuchte L, das Kleinste seyn muß. Folglich das Differenzial $(-2cdx + 2xdx + 2ydy) = 0$. Daher $-2c + 2x + 2y\frac{dy}{dx} = -2c + 2x + 2S$ (es ist S die Subnormale) $= 0$. Daher $x + S = c$. Daher wird die Gleichung des Quadrats der gesuchten Linie L diese: $L^2 = S^2 + y^2$. Nun macht (nach dem Pyth. Satze) das Quadrat der Normale so viel aus, als die Summe der Quadrate von der Subnormale und von der Ordinate. Also ist L die Normale. Es sey z. E. (Fig. 156.) in dem Quadranten die kürzeste Linie hm zu suchen. Hier ist x oder die Abscisse zugleich die Normale, weil der Halbmesser auf der Tangente rechtwinklicht stehet.

7) Die kleinste Linie lm von einem gegebenen Aussenpuncte l in die krumme Linie (Fig. 156.) zu suchen. Es ist alsdann bestimmt oder beständig a, oder die Linie von l in den Punct m, auf dessen Tangente die Linie lm rechtwinklicht steht. Wenn man die Tangente des Puncts m zieht; so sieht man unmittelbar, daß lm eine der Seiten, und jedes andre lm eine verlängerte Hypothenuse

Digitized by Google

eines rechtwinkelichten Triangels sey. Daher ist a die kürzeste gesuchte Linie. Hier und in manchen andern Fällen bey Suchung des Größten und Kleinsten ist die Differenzialrechnung unnöthig oder kein kürzerer Weg.

8) Wenn (Fig. 153.) die krumme Linie ein Quadrant des Zirkels ist; so hat der Bogen von 90 Grad eine unendliche Subtangente, ein unendliches $\frac{ydx}{dy}$, und (weil y endlich ist) ein unendliches dx : dy. Eben so hat der unendlich kleine Bogen, dessen Ordinate in A fällt, eine Subtangente, (ein ydx : dy) welche unendlich klein, oder = o ist, und zwar auch deswegen, weil dx : dy = o ist, daher umgekehrt dy : dx unendlich seyn muß. Wenn nun eine krumme Linie sich so wendet und krümmet, daß ein mittleres x da ist, welches eine Bedingung von einem y wird, dessen dy : dx unendlich ist: so kann auch dieses y das kleinste oder größte seyn. Und ob man zu dieser Regel, (durch dy : dx = ∞, das größte oder kleinste y zu suchen,) seine Zuflucht nehmen müsse, erhellet daraus, wenn die Setzung, daß dy : dx, oder daß dy = o sey, Widersprüche geben würde. Es sey z. E. die Grundgleichung $y - a = a^{\frac{1}{3}}(a - x)^{\frac{2}{3}}$. So bekömmt man durch Differenziren dieses $dy : dx = \frac{-2a^{\frac{1}{3}}}{3(a-x)^{\frac{1}{3}}}$. Dies kann nur = o seyn, wenn x als unendlich ange-

angenommen wird. Also setze man dy : dx unendlich, so muß a — x = 0, folglich a = x seyn. Und alsdann ist a = x auch = y nach der Grundgleichung; und dieses y ist das kleinste.

§. 127.

1) Man nenne (Fig. 157.) r den Halbmesser des Zirkels, und v die Abscisse in einem Quadranten, wenn die Abscissen nicht von der Peripherie, sondern von dem Mittelpuncte, anfangen. Alsdann wird die Definition des Zirkels, welche sonst ist $y^2 = ax - x^2$ (wo a den Durchmesser und x die Abscisse von dem Scheitelpuncte an gerechnet, bedeutet,) in $y^2 = r^2 - v^2$ verwandelt, wie die Verwechselung der Buchstaben leicht zeiget. Alsdann ist klar, daß das y, welches mp ist, sey $\sqrt{r^2 - v^2} = \sqrt{r^2 - (cp)^2}$. Alsdann hat (§. 125. 3.) der Raum R oder mmp das Differenzial $y\,dv = (\sqrt{r^2 - v^2})\,dv$, welches (nach dem Binom. Satze Zahlenk. §. 141.) ist $dv.(r - \frac{v^2}{2r} - \frac{v^4}{8r^3} - \frac{v^6}{16r^5} - \frac{5v^8}{128r^7}$ u. s. w.) oder, wenn man r = 1 nennt, $dv.(1 - \frac{v^2}{2} - \frac{v^4}{8} - \frac{v^6}{16} - \frac{5v^8}{128})$ u. s. w. davon ist nach den Regeln (§. 124.) das Integral $v - \frac{v^3}{6} - \frac{v^5}{40} - \frac{v^7}{112} - \frac{5v^9}{1152}$ u. s. w. Dieses Integral ist = R, oder der Raum mmp. Wird nun v dem Halbmesser (welcher r oder 1 ist) gleich;

ist $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13}$ u. s. w. gleich der Fläche des Quadranten, welche wir also auf diese Art nicht eher genau kennen, als bis wir diese Reihe unendlich fortsetzen und summiren; also niemals. Nun ist die Quadratur des ganzen Zirkels viermal so groß; also niemals, auf diese Art, bis zur ganz vollständigen Genauigkeit, erfindlich.

2) Es ist (Fig. 158.) ein Quadrant, dessen Halbmesser cm = 1. Der Bogen b oder m m hat das Differenzial d b oder m m; seine Tangente t oder m q hat das Differenzial d t oder q h. Seine Secante s ist = q c. Die Punkte q und v haben in dem langen Triangel 2 gleiche Winkel, die wegen unendlicher Kleinheit des dritten fast rechte Winkel sind. Der kleine Winkel neben c ist d c. Der obere Winkel bey q ist (wegen zweyer rechtwinkelichter Triangel derselben Spitze,) = c + dc = c, (weil d c unendlich klein). Also weil der obere Winkel bey v ein rechter ist: so ist der Winkel h gleich dem untern q. Also in Linien

s : (c m oder 1) = (q h oder d t) : (q v).

Folglich nach dem Pyth. Satze:

$(\sqrt{1^2+t^2}) : 1 = dt : (qv$, welches also ist $\frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}$

Ferner wegen conformer Triangel:

$\left(\frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}} \text{ oder } qv\right) : \left(\sqrt{1+t^2} \text{ oder } s.\right) =$

$\left(\begin{matrix} m\ m \\ \text{oder } d\,b \end{matrix}\right) : 1$ oder Rad.

Also

Also db, das Differenzial des Bogens, ist = dt. Dies ist der Ausdruck für das Differenzial eines Zirkelbogens durch Hülfe der Tangente.

3) Hingegen das Quadrat desselben Differenzials $(db)^2$ oder $(\dot{C}m)^2$ ist gleich (nach Fig. 153. der folgenden (durch verschiedene Ausdrücke angezeigten) Grösse $(dy)^2 + (dx)^2 =$ (wenn f den Sinus, c den Cosinus, q den Quersinus des Winkels bey H, und wenn 1 den Radius bedeutet,) $(df)^2 + (dq)^2 = (df)^2 + (d.1 - c)^2 = (df)^2 + (dc)^2 = (df)^2 + (d.(1^2 - f^2)^{\frac{1}{2}})^2 = (df)^2 + (\frac{1}{2}.(1-f^2)^{-\frac{1}{2}}.-2fdf)^2 = (df)^2 + \left(\frac{-fdf}{\sqrt{1-f^2}}\right)^2 = (df)^2 + \frac{f^2(df)^2}{1-f^2} =$ $df^2 : 1 - f^2$. Dieses, sagte ich, ist das Quadrat des Differenzials oder $(db)^2$ des zu dem Winkel bey H gehörigen Bogens. Ich sagte $(db)^2 = \frac{(df)^2}{1-f^2}$. Also $db = \frac{df}{\sqrt{1-f^2}}$, der Ausdruck für das Differenzial eines Zirkelbogens durch Hülfe des Sinus.

4) Es ist (nach No. 2) das Differenzial dieses Bogens, oder es ist $db = dt : (1 + t^2) = dt . \frac{1}{1+t^2} = dt$ multiplicirt durch die unend-

liche Reihe $1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8$, u.s.w. oder $db = dt - t^2\,dt + t^4\,dt - t^6\,dt + t^8\,dt$, u.s.w. Dessen Integral ist (nach §. 124.) $t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9}$. Es ist aber (nach der Trigonometrie) die Tangente zu 45 Grad dem Radius gleich, oder nach obigem Ausdrucke $= 1$. Also hat der Bogen von 45 Grad die Linienlänge $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$, u.s.w. Acht mal so lang ist der ganze Zirkelkrais, welchen wir also nur erst alsdann mit vollkommner Schärfe rectificiren könnten, wenn die obige unendliche Reihe ausgeführt und summirt wäre.

§. 128.

Nun zur Betrachtung einiger andrer lehrreichen krummen Linien. Wie man einen Kegel durch einen einzigen Durchschnitt auch schneiden mag, so bekömmt man eine krumme Linie. Die 3 merkwürdigsten, davon noch nichts erwehnt ist, sind die Parabel, Ellipse und Hyperbel. Die Fläche zwischen den Schenkeln der Parabel schneidet A, oder die Axe des Kegels nicht; sondern a, die Axe der Parabel, bleibt parallel der Linie c, einer Seitenlinie des Kegels, nach welcher die von a durch A gezognen graden Linien gehen. Hingegen wenn die Axe der krummen Linie a, und die Seite des Kegels c, nach gehöriger Verlängerung, zusammenstossen; so heißt die krumme Linie eine

Hyper-

Hyperbel. Und wenn die Axe des Kegels A von der Fläche zwischen den Schenkeln der krummen Linie durchschnitten wird: so heißt sie eine Ellipse.

Zuerst von der Parabel. Fig. 159. In der Axe der Parabel, welche von dem Scheitelpuncte A anfängt, ist f ein Endpunct einer Abscisse, welcher der Brennpunct heißt, weil seine Ordinate $\frac{1}{2}$ p, oder die Hälfte des p, des Parameters, einer beständigen Linie, ist.

1) Wenn y die Ordinate, x die Abscisse heißt: so ist der Satz $y^2 = px$ die Gleichung oder Grundregel für die Parabeln, nämlich der niedrigsten Ordnung. (§. 121.) Diese Gleichung aber leidet verschiedene Ausdrücke. Z. E. 1) $\pm y = \pm \sqrt{px}$. 2) $y^2 : x = p$. 3) $y^2 : p = x$. 4) $y : \sqrt{p} = \sqrt{x}$. 5) $y : \sqrt{x} = \sqrt{p}$.

2) Also Af, oder die Entfernung des Brennpuncts von der Scheitel, ist $\frac{1}{4}$ des Parameters, oder $\frac{1}{2}$p (welches man sieht, wenn man Af für x, und $\frac{1}{2}$p für y setzt) in der Gleichung $y^2 = px$.

3) Wenn (nach der Gleichung $y^2 = px$) die Abscisse x Nulle, oder unendlich ist; so ist auch y^2, folglich y, im ersten Falle Nulle; unendlich aber im andern Falle.

4) Die Parabel hat gleiche positive und negative Ordinaten an demselben Endpuncte

puncte der Abscisse nach der rechten und linken Hand. Dies sagt die Gleichung $\pm y = \pm \sqrt{px}$.

5) Negative Abscissen (in dem Leeren hinter dem Scheitelpuncte A) und dortige Ordinaten sind unmöglich. Denn $y = \pm \sqrt{p.(-x)}$ ist eine unmögliche Wurzel.

6) Die Entfernung des Brennpuncts f von einem jeden Puncte m in der Parabel, ist entweder nach oben fm, oder fm nach unten. Es ist im ersten Falle fm (nach dem Pyth. Satze) $= \sqrt{y^2 + (\frac{1}{2}p - x)^2}$. Im zweyten Falle ist $fm = \sqrt{y^2 + (x - \frac{1}{2}p)^2}$. In beyden Fällen $= \sqrt{px + x^2 - \frac{1}{2}px + \frac{1}{4}p^2} = x + \frac{1}{2}p$.

6) Wenn man also eine Axe macht, und die Scheitel A, auch die Länge des Parameters p, folglich $\frac{1}{2}p$ bestimmt, und wenn man auf dieser Axe allenthalben unbegränzte Ordinaten durchzieht, und die Punkte in der Axe c, c, c, u. s. w. nennt; so darf man den Faden nur jedesmal $\frac{1}{2}p$ länger machen, als die Abscissen Ac, Ac, Ac, u. s. w. um die Ordinaten zu diesen Abscissen so abzuschneiden, daß die Endpunkte m, m, m, u. s. w. in der Parabel sind.

7) In dem Zirkel ist die Axe a dem Parameter p gleich. Und die Regel für den Zirkel ist alsdann $y^2 = px - x^2$. Ist p unendlich und x endlich;

endlich; so ist $y^2 = px$. Und $y = \sqrt{\infty}\sqrt{x}$. Also sind in unendlich großen Zirkeln die Ordinaten von Ordinaten einer Parabel, deren Parameter p unendlich ist, nicht verschieden.

8) Weil $y^2 = px$; und $\dot{y}^2 = p\dot{x}$; so ist, wenn man die Gleichungen dividirt, $y^2 : \dot{y}^2 = x : \dot{x}$; das ist, die Quadrate der Ordinaten verhalten sich, wie die Abscissen.

9) Ferner kann man die Summe S und die Differenz D zweyer Ordinaten, y und $\dot{y}$, folgendermassen ausdrücken, durch einander multipliciren, und finden, daß das Product aus der Summe und Differenz zweyer Ordinaten, oder daß das DS gleich sey dem Producte aus dem Parameter p, und aus dem Unterschirde der zu jenen Ordinaten y und $\dot{y}$ gehörigen Abscissen x und $\dot{x}$; oder, daß wenn dieser Abscissenunterschied u heißt, folgender Satz wahr sey: $DS = up$.

Denn $y + \dot{y} = S = \sqrt{px} + \sqrt{p\dot{x}}$

$y - \dot{y} = D = \sqrt{px} - \sqrt{p\dot{x}}$

(Mult.) $SD = px - p\dot{x} = p(x - \dot{x}) = pu$.

10) Die Subtangente, welche (§. 117.) $ydx : dy$ ist, oder (Fig. 159.) RT, gleicht bey der Parabel dem Doppelten der Abscisse

Kurz,

Kurz, Subt = 2x. Denn $y^2 = px$. Daher $2ydy = pdx$. Oder $dx = 2ydy : p$. Also $ydx : dy = \frac{y}{dy} \cdot \frac{2ydy}{p} = \frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$ = Subt. Daher ist TA, oder die Differenz der Subtangente und der Abscisse, oder 2x — x gleich der Abscisse x, oder AR. Und die Subnormale HR, (§. 117.) oder ydy : dx ist $= ydy : \frac{2ydy}{p} = \frac{1}{2}p$, oder der halbe Parameter.

11) Also (Fig. 159.) ist $Tf = (TA + Af) = x + \frac{1}{2}p$. Und gleichfalls $fH = (fR + RH) = (fR + \text{Subnor.}) = (fR + \frac{1}{2}p) = (x - Af) + \frac{1}{2}p = (x - \frac{1}{2}p) + \frac{1}{2}p = x + \frac{1}{2}p$. Also $Tf = fH = fM$ nach No. 6. Daher ist der Triangel fMH gleichschenkelicht (durch $fM = fH$.) Folglich der Winkel $fMH = fHM$, gleich dem Wechselswinkel KMH. Sowohl HMn, als HMT, sind rechte Winkel der Normale und Tangente. Subtrahirt man von dem ersten den Winkel KMH, und von dem andern den gleichen Winkel fMH, so müssen gleich bleiben die Reste $nMK = fMT$. Man nenne den ersten den Einfallswinkel einer, der Axe der Parabel parallelen, Bewegung oder Direction nach einem Punkte M. Wenn nun der undurchdringliche Punkt M das Ankommende (z. E. einen Lichtstrahl) so abprallen läßt, daß der Apprallungswinkel dem Einfallswinkel gleich ist; so wird alles, an alle Punkte

der

der Parabel, parallel mit der Axe Ankommende, zusammen von diesen Punkten nach dem Brennpunkte f gestossen. Ein in der Optik und bey Brennspiegeln merkwürdiger Satz!

§. 129.

1) In der Ellipse (Fig. 160.) ist die grosse Axe AA, oder kürzer, a eine beständige Linie. Und wenn p der Parameter §. 128. ist; so ist die Gleichung oder Regel diese: $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$, oder $y = \sqrt{px - px^2 : a}$.

2) Es kann y^2 nach dieser Gleichung, folglich auch y, zweymal Nulle werden; 1) wenn $x = 0$, und 2) wenn $px = \frac{px^2}{a}$, das ist, wenn $x = a$.

3) Weil die Gleichung ist $y = \pm\sqrt{px - px^2 : a}$; so giebt es gleiche positive und negative Ordinaten an jedem Punkte der Axe, wie fm und fm, zur Rechten und linken von f. Und weil die Gleichung $y = \sqrt{px - \frac{px^2}{a}}$ oder $\frac{\sqrt{apx - px^2}}{\sqrt{a}}$ sowohl, wenn x negativ, als wenn es größer wie a angenommen würde; weil, sage ich, alsdann die Gleichung eine unmögliche Wurzel bekäme: so wird die Abscisse weder negativ, noch gröſſer, wie a, sondern hat mit a Anfang und Ende.

4) Man

4) Man nehme zweyerley y und zweyerley x.

$$y^2 = px - \frac{px^2}{a} = \frac{apx - px^2}{a}$$

$$\dot{y}^2 = p\dot{x} - \frac{px^2}{a} = \frac{apx - px^2}{a}$$

Dividirt man beyde Gleichungen; so erkennt man folgendes Verhältniß der Quadrate zweyer Ordinaten: $y^2 : \dot{y}^2 = x(a-x) : \dot{x}(a-x)$. Sie verhalten sich nämlich, wie die Producte derer durch die Endpunkte der Abscissen abgetheilten Segmente oder Stücke der grossen Axe.

5) Des Mittelpunkts in der großen Axe gedoppelte Ordinate $2mc$, oder mcm (Fig. 160.) heißt die kleine Axe, oder k. Also ist nach der Grundgleichung $\frac{k^2}{4} = \frac{pa}{2} - \frac{pa^2}{4}$, weil $\frac{1}{2}a$ die Abscisse dieser Ordinate ist. Folglich ist k, oder die kleine Axe, $= \sqrt{pa}$, und daher eine beständige Grösse. Aus $k = \sqrt{p}\sqrt{a}$ folgt $p = \frac{k^2}{a}$, und $a = \frac{k^2}{p}$. Folglich ist nach einer neuen Gleichung $y^2 = \frac{k^2x}{a} - \frac{k^2x^2}{a^2}$, wenn man für p seinen Werth gesetzt hat.

6) Wenn die Abscisse, (die alsdann nicht mehr x heissen kann,) nicht von A, sondern von c anhebt; so heisse sie V. Es ist also V die Entfernung

fernung einer Ordinate, (oder des Endpunkts der zu ihr gehörigen Abscisse,) von dem Mittelpunkte c. Daher ist $V = \frac{1}{2}a - x$, so lange die Abscisse x nicht grösser, als $\frac{1}{2}a$ wird. Alsdann aber wird $V = x - \frac{1}{2}a$. Nun setze man in der Grundgleichung für x seinen Werth, $\frac{1}{2}a \pm v$. So wird

$$y^2 = px - \frac{px^2}{a} = \frac{pa}{2} \pm pv - \frac{pa}{4} \pm pv - \frac{pv^2}{a}$$

$$= \frac{pa}{4} - \frac{pv^2}{a} = p\left(\frac{a}{4} - \frac{v^2}{a}\right) = \text{(nach 5.)}$$

$$\frac{K^2}{a} \cdot \frac{a}{4} - \frac{v^2}{a} = \frac{K^2}{4} - \frac{K^2 v^2}{a^2}.$$ Dies sage, ich, ist y^2 nach einer neuen Gleichung, wenn man $\frac{1}{2}a \pm v$ für x gesetzt hat.

7) Die Distanz des Brennpunkts f von der Scheitel A heisse D; aber seine Entfernung von c, dem Mittelpunkte, heisse e. So ist die verwandelte Grundgleichung für die Ordinate des Brennpunkts folgende: $\frac{p^2}{4} = pD - \frac{pD^2}{a}$. Also ist $D^2 - Da = -\frac{ap}{4}$ $= -\frac{K^2}{4}$ (nach 5.) Also $(D - \frac{1}{2}a)^2 = \frac{a^2 - k^2}{4}$. Also $D = \frac{1}{2}a \pm \frac{\sqrt{a^2 - k^2}}{2}$. Daher sind zwey Abscissen für 2 Brennpuncte, f und f. Die Differenz ihrer Abscissen ist $\sqrt{a^2 - k^2}$. Sie sind also von dem Mittel-

punkte gleichweit entfernt; und jede Entfernung davon e ist $= \frac{\sqrt{a^2 - k^2}}{2}$. Daher ist f so weit von A, als f von A. Ferner weil $e^2 = \frac{a^2 - k^2}{4}$, und weil folglich $k^2 = a^2 - 4e^2$; so wird durch Einschiebung dieses Wehrts von K^2, die No. 6. angeführte Gleichung, welche war $y^2 = \frac{k^2}{4} - \frac{k^2 v^2}{a^2}$ verwandelt in folgende hernach brauchbare Gleichung $y^2 = \frac{a^2 - v^2 - e^2}{4} + \frac{4e^2 v^2}{a^2}$.

8) Man differenzire die Grundgleichung $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$. So wird $2ydy = pdx - \frac{2pxdx}{a}$ oder $\frac{2ydy}{dx} = p - \frac{2px}{a}$. Dieses nach (§. 126.) der Nulle gleich gesetzt, giebt, daß $x = \frac{1}{2}a$, wobey die zweyte Ordinate wird $\frac{1}{2}k$, die halbe kleine Axe.

9) Die grosse Axe A A, und die kleine k k theilt (Fig. 161.) den Elliptischen Raum sonder Zweifel in zwey gleiche Hälften, deren jede 2 gleiche Quadranten hat. Dieses sowohl, als daß von der kleinen Axe angerechnet, ein

Digitized by Google

ein jedes Paar von einem obern und untern gleich dicken Streifen, zwischen 2 Doppelordinaten, welche oben und unten gleich weit von dem Mittelpunkte entfernt sind, einen gleichen Raum habe, fließt aus dem Satze, daß in gleicher Entfernung von dem Mittelpunkte gleiche Ordinaten sind. Ferner es sind die Triangel cnr und cnr ähnlich. Und nr : rc = nr : rc oder mit einfachen Zeichen y : v = y : v. Aber v ist = ½ a − x, das ist die halbe grosse Axe, minder der zu der Ordinate y oder nr gehörigen, Abscisse.

Eben so ist rc oder v = x − ½ a. Also ist y : (½ a − x) = y : (x − ½ a). Folglich $y^2 : (\frac{1}{4}a^2 - ax + x^2) = y^2 : (x^2 - ax + x^2)$. Aber (nach 4) ist $y^2 : y^2 = xa - x^2 : xa - x^2$. Daher $(\frac{1}{4}a^2 - ax + x^2) : xa - x^2 = (\frac{1}{4}a^2 - xa + x^2) : xa - x^2$. Addirt man das zweyte zum ersten und das vierte zum dritten Gliede; so bleibt die Proportion

$$\frac{1}{4}a^2 : xa - x^2 = \frac{1}{4}a^2 : xa - x^2$$

Hieraus folgt $xa - x^2 = xa - x^2$ oder $x^2 - xa = x^2 - xa$. Nach beyderseitiger Addition eines $\frac{1}{4}a^2$ wird $(x - \frac{1}{2}a)^2 = (x - \frac{1}{2}a)^2$. Also $\pm(x - \frac{1}{2}a) = \pm(x - \frac{1}{2}a)$, welches, weil (nach der Figur 161) x = Ar und x = Ar, keine andere gültige Bedeutung haben kann, als daß ½ a − x = x − ½ a, folglich daß rc = cr.

Digitized by Google

Daher sind die ähnlichen Triangel rnc und rnc auch gleich. Darum ist nc = cn, oder eine jede von einem zum andern Punkte der Ellipse durch den Mittelpunkt gezogne Linie wird durch den Mittelpunkt in 2 Hälften getheilt. Jene eben jetzt als gleich bewiesene Triangel, wenn man dem oberen den oberen Raum t, dem unteren den unteren Raum t zufügt, füllen 2 gleiche Halbstreifen. Also sind auch die Räume t und t gleich. Und eben daraus erhellet, daß eine jede von einem zum andern Punkte der Ellipse durch den Mittelpunkt durchgehende Linie den elliptischen Raum in zwey gleiche Hälften theilet.

10) Die Summe der Linien aus beyden Brennpunkten (Fig. 162.) nach einem und demselben Punkte M oder m in der Ellipse (also fM + $\overline{fM}$, oder fm + $\overline{fm}$) ist a oder die grosse Axe.

Beweis. Erster Theil, wenn M der Punkt ist.

$(fR)^2 = (e - v)^2$. Denn e ist fc, und v ist cR

Also $(fR)^2 = e^2 - 2ev + v^2$

$y^2 = (RM)^2 = \frac{a^2}{4} - v^2 - e^2 + \frac{4e^2v^2}{a^2}$

(nach No. 7.) Daher $(fR)^2 + (RM)^2 = \frac{a^2}{4} - 2ev + \frac{4e^2v^2}{a^2} = (\frac{1}{2}a - \frac{2ev}{a})^2 =$

$(fM)^2$ nach dem Pyth. Satze. Also $fM = \frac{1}{2}a - \frac{2ev}{a}$

In

In diesem Falle ist $\dot{f}R = 2e - fR = 2e - (e - v) = e + v$. Also $(\dot{f}R)^2 = e^2 + v^2 + 2ev$

Und $(RM)^2 = \frac{a^2}{4} - v^2 - e^2 + \frac{4e^2v^2}{a^2}$

Also $(\dot{f}R)^2 + (RM)^2 = \frac{a^2}{4} + 2ev + \frac{4e^2v^2}{a^2}$

$= \left(\frac{a}{2} + \frac{2ev}{a}\right)^2 = (\dot{f}M)^2$. Also ist $\dot{f}M = \frac{a}{2} + \frac{2ev}{a}$

Also in diesem Falle $fM + \dot{f}M = a$.

Zweyter Theil, wenn m der Punkt ist $(fr)^2 = (v - e)^2 = v^2 - 2ve + e^2$, wie zuvor. Also ist $(fr)^2 + (rm)^2$ zusammen oder $(fm)^2$ wie zuvor. Daher $fm = \frac{1}{2}a - \frac{2ev}{a}$, wie zuvor.

Ferner $(\dot{f}r)^2 = (2e + fr)^2 = (2e + (v - e))^2 = (e + v)^2$ wie zuvor. Daher muß $(\dot{f}r)^2 + (rm)^2$ oder zusammen $(\dot{f}m)^2$ seyn, wie zuvor. Daher $\dot{f}m = \frac{1}{2}a + \frac{2ev}{a}$. Folglich auch jetzund $fm + \dot{f}m = a$, oder die grosse Axe.

Daher wird die Ellipse mechanisch beschrieben, wenn man die grosse Axe bestimmt; 2 Brennpunkte befestigt; an jeden das Ende eines der grossen Axe gleichen Fadens bindet; und ihn alsdann ausgedehnt herumführt. Denn wo der Winkel dieses ausgedehnten Fadens seyn kann, da ist man in der Ellipse.

Digitized by Google

11) Die Ellipse artet aus in einen Zirkel, wenn der Parameter p, von k der kleinen Axe, fast nicht verschieden ist. Denn, da (nach 6.) $K^2 = a^2 - 4e^2$, oder $k = \sqrt{a^2 - 4e^2}$ ist, und da in diesem Falle e, die Entfernung des Brennpuncts vom Mittelpunkte, relativisch unendlich klein wird: so wird bey diesen Umständen die Gleichung der Ellipse, welche war $y^2 = px - px^2 : a$ verwandelt in $y^2 = kx - kx^2 ; a = \sqrt{a^2 - 4e^2}$. $x - (\sqrt{a^2 - 4e^2} : x^2 : a. = ax - x^2$. Sie artet aus in eine Parabel, wenn $px - px^2 : a$ für bloß px darf gehalten werden, das ist, wenn der letzte Theil relativisch unendlich klein wird, das ist, wenn p unendlich klein gegen a, oder a unendlich groß gegen p angenommen wird.

§. 130.

1) Zur Hyperbel! (Fig. 163.) Von dem Punkte A herunter fangen die positiven Abscissen an. AB ist der Axe, welche von A herunter ins Unendliche geht, Fortsetzung; heißt die Zwergaxe oder kurz a; und ist eine vorausgesetzte beständige Linie. Ueber B hinaus fängt die Gegenhyperbel an. In der Hyperbel ist f, und in der Gegenhyperbel f der Brennpunct. Der Mittelpunkt c theilet die Hälften von a oder von der Zwergaxe. Man sieht den Parameter p in zwey Hälften an beyden Seiten des Brennpunkts f. Ueber A liegt in 2 Hälften, die mittelste Proportionallinie zwi-

schen

chen a und zwischen p, oder $\sqrt{ap}$ oder k. Sie wird auch die kleine Axe genannt. Mehr Erklärungen weiter unten.

Die Grundgleichung der Hyperbel ist $y^2 = px - \frac{px^2}{a} = px + \frac{px^2}{-a}$. Fängt die Abscisse v von c an; so ist, (weil $v = x + \frac{1}{2}a$) das Quadrat der Ordinate $y^2 = p(v - \frac{1}{2}a) + \frac{p(v - \frac{1}{2}a)^2}{a} = pv - \frac{pa}{2} + \frac{pv^2}{a} - pv + \frac{pa}{4} = \frac{pa}{4} - \frac{pa}{2} + \frac{pv^2}{a}$, und (weil $pa = k^2$) $= \frac{k^2 v^2}{a^2} - \frac{1}{4}k^2$. Dies ist y^2 nach der zweyten Gleichung.

2) Es kann aber y^2, folglich y, zweymal Nulle werden, erstlich wenn $x = 0$; zweytens wenn $x = -a$. Auf der Zwergaxe a können keine Ordinaten seyn. Denn ihre Abscisse x wäre nicht nur negativ (weil von dem Punkte A nach f herunter, die Abscissen anfangen) sondern auch negativisch kleiner als a. Alsdann würde, (wenn diese negative kleinere Abcisse $-\mu$ heißt) $y^2 = -p\mu + \frac{p\mu^2}{a} = -p\mu + p\mu \cdot \frac{\mu}{a}$. Alsdann wäre $\frac{\mu}{a} = 1 - q$, wenn q irgend etwas Positives bedeutet. Folglich würde die Gleichung $y^2 = -qp\mu$, welches wegen der unmöglichen Wurzel unmöglich ist. Aber wenn die negative

gative Abscisse — μ aus einem μ besteht, das grösser, als a ist; so wird eine Gleichung für y^2 und für y möglich. Daher giebt es in der Gegenhyperbel (die wegen gewisser Ursachen mit der Haupthyperbel zugleich betrachtet wird) wieder Ordinaten zu negativen Abscissen, die von dem Punkt A angerechnet werden, und grösser, als a, sind. Weil aber in $y^2 = px + px^2 : a$, die Abscisse x, positiv und negativ für die Möglichkeit der Gleichung nicht zu groß kann angenommen werden; so geht die Axe positiv und negativ unendlich fort. Und weil die Ordinaten mit der Axe wachsen; so giebt es keine größte Ordinaten. Aber in beyden Hyperbeln sind 2 gleiche Ordinaten wie $\frac{1}{2}p$ und $\frac{1}{2}p$ immer neben einander, eine positive, eine negative, an demselben Abscissenpunkte. Dies erkennt man aus $y = \pm\sqrt{px + px^2 : a}$.

3) Die bey c anfangenden Linien c und c heissen Asymptoten. Sie erreichen niemals die unendlich fortgesetzte Hyperbel, sondern es bleibt allemal ein Zusatz z, der zu der Ordinate y nöthig ist, um bis in die Asymptote zu reichen. Denn wegen conformirter Triangel, und weil v die Abscisse für y (von c an gerechnet,) bedeutet; so ist $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}k = v : (y + z)$. Also $a^2 : k^2 = v^2 : y^2 + 2yz + z^2$. Und (nach No. 2.) $a^2 : k^2 = v^2 : \left(\frac{k^2v^2}{a^2} - \frac{k^2}{4}\right) + 2yz + z^2$. Also

folgt

folgt die Gleichheit der Producte $k^2 v^2 = k^2 v^2 - \frac{a^2 k^2}{4} + 2a^2 yz + a^2 z$. Daher ist, nach leichter Zwischenrechnung, $2yz + z^2$, (oder die Differenz der beyden Quadrate $(y+z)^2 - y^2$), gleich einer beständigen Grösse $\frac{1}{4} k^2$, nämlich dem Quadrate der halben kleinen Axe. Daher wird z niemals Nulle, doch, mit dem Wachsthume der Ordinate, y immer kleiner.

4) Die Linie g bey $\frac{1}{2}$ k ist der Asymptote t parallel, und ihr Quadrat heißt die Potenz der Hyperbel. Also wegen conformirter Triangel, wie die Figur beweiset, ist $\frac{1}{2} k : g = k : \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + k^2}$, Und $\frac{k^2}{4} : g^2 = k^2 : \frac{a^2 + k^2}{4}$. Folglich $g^2 k^2 = \frac{k^2}{4} \cdot \frac{a^2 + k^2}{4}$. Oder $g^2 = \frac{1}{16} (a^2 + k^2)$. Das Quadrat g^2, oder die Potenz der Hyperbel, ist also das Sechszehnthel der summirten Quadrate beyder Axen.

5) Der grosse Rest von der Asymptote z, wenn nur w daran fehlt, heisse λ. Die kleine Linie φ sey parallel mit der gegen überstehenden Asymptote. Auf der andern Seite ist auch ein x, w und z und φ. Denn $z = z$. Und $y = y$. Die dritte Seite des kleinen Triangels ist w, und φ ist daselbst auch der Asymptote parallel, u. s. w. Die Triangel also, erstlich der, dessen Grundlinie

k, zweytens die beyden, deren Grundlinie ein z ist, und der größte, welcher die Summe z+y+y+z zur Grundlinie hat, sind allesammt ähnlich. Also $\lambda : (y+y+z) =$ (als proportionirte Stücke, ich sage) $= \frac{1}{2}\sqrt{a^2+k^2} : k$. Oder, wenn $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+k^2}$ anfangs $= r$ ist; so ist $\lambda : (y+y+z) = r : k$. Daher erster Satz $\lambda = r(y+y+z) : k$.

Ferner, wegen der Triangel ist $\varphi : z =$ $(\frac{1}{2}\sqrt{a^2+k^2}$, oder wie r) : k. Also $\varphi = \frac{zr}{k}$.

Also das Rechteck $\lambda\varphi = \frac{r^2 \cdot (z^2+2yz)}{k^2}$. Oder nach No. 3. ist $\lambda\varphi = \frac{r^2 \cdot (k^2 : 4)}{k^2} = r^2 : 4 =$ (nach dem ersten Satze) ich sage $= \frac{(\frac{1}{2}\sqrt{a^2+k^2})^2}{4}$ $= \frac{1}{16}(a^2+k^2)$. Das ist, dieses Product oder Rechteck $\lambda\varphi$ ist der 16te Theil der summirten Quadrate beyder Axen, folglich nach No. 4. der Potenz der Hyperbel gleich. Und eben dieses ist eine Definition der Hyperbel durch ihre Asymptoten.

6) Die Entfernung des Brennpunktes f, von dem Mittelpunkte c, welche e heißt, ist das bestimmte v, für die Ordinate des Brennpunkts nach der No. 2. gegebenen Gleichung, $y^2 = \frac{v^2k^2}{a^2} - \frac{k^2}{4}$. Sie enthält also folgende

Glei-

Gleichung $\frac{p^2}{4} = \frac{e^2 k^2}{a^2} - \frac{k^2}{4}$. Darum ist $\frac{p^2 + k^2}{4} = \frac{e^2 k^2}{a^2}$. Und $e^2 = \frac{a^2 p^2 + a^2 k^2}{4 k^2}$. Nun ist (nach No. 1.) $ap = k^2$. Also $e^2 = \frac{k^2 + a^2}{4}$. Und folglich ist $\frac{k^2}{4} = e^2 - a^2$, oder $k^2 = 4e^2 - a^2$. Dieser Wehrt von k^2 sey in die jetzt erwähnte Gleichung getragen, nämlich in $y^2 = \frac{v^2 k^2}{a^2} - \frac{k^2}{4}$. So wird sie, $y^2 = \frac{4e^2 v^2}{a^2} - v^2 - e^2 + a^2$, eine alsobald nutzbare Gleichung.

7) Die Differenz, der aus beyden Brennpunkten, f und f̂, der Hyperbel und Gegenhyperbel an eben denselben Punkt m oder M gezogenen Linien, also f̂m − fm, oder f̂M − fM, ist allemal die Zwergaxe oder a.

Erster Fall, wenn m der Punkt ist. Alsdann ist, von dem entfernten Brennpunkte, die Linie f̂h = e + v. Denn e ist fc, und v ist ch. Also $(\hat{f}h)^2 = e^2 + 2ev + v^2$. Daher $(\hat{f}m)^2 = (\hat{f}h)^2 + y^2$. Denn y ist hm, (man sehe No. 6. und addire). Also ist $(\hat{f}m)^2 = \frac{a^2}{4} + 2ev + \frac{4e^2 v^2}{a^2}$.

Und

Und die Wurzel $fm = \frac{1}{2}a + \frac{2ev}{a}$. So auch $(fm)^2$ (von dem nähern Brennpunkte her,) ist $= (fh)^2 + y^2 = (v^2 - 2ev + e^2) + y^2 = \frac{a^2}{4} - 2ev + \frac{4e^2v^2}{a^2}$. Also die Wurzel fm, welche etwas positives seyn muß, ist $\frac{2ev}{a} - \frac{1}{2}a$.

Also der Rest von $fm - fm$ bleibt a.

Zweyter Fall, wenn M der Punkt ist. $(fH)^2$ und y^2 sind, wie zuvor, also ist fM, wie zuvor, da der Punkt der Hyperbel m war, in Ansehung des entferntern Brennpunkts der Gegenhyperbel. Imgleichen, was den nähern Brennpunkt betrifft, so ist $(fH)^2 + y^2 = (e-v)^2 + y^2$. Dies giebt für $(fM)^2$ eine Summe, wie zuvor, also auch eine gleichförmige für fM. Daher ist, wie im ersten Falle, $fM - fM = a$.

Folglich wird eine Hyperbel mechanisch beschrieben auf folgende Art. Wenn die Zwergaxe a, und die Brennpunkte f und f bestimmt sind; so verbinde man mit dem Punkte f das eine Ende eines Lineals dergestalt, daß es sich an diesem Punkte herumbewegen kann. An t, dem andern Endpunkte des Lineals, binde man einen Faden, der um so viel als die Zwergaxe beträgt, kürzer ist, wie das ganze Lineal, (das ist, wie tf.) Dieses Fadens zweytes Ende sey fest an dem andern

Brenn-

Digitized by Google

Brennpunkte f. Nun entferne man anfangs den Punkt des Lineals, woran der Faden gebunden ist, so weit von dem zweyten Brennpunkte, daß der Faden gespannt sey, und daß drey Linien, nämlich das Lineal fr, der gedehnte Faden rf, und die Linie oder Distanz ff, einen Triangel mache. Nun ist r, in der Hyperbel, die man beschreiben will. An dem Punkte r (ausser diesem Triangel) setze man den Schreibgriffel, und drücke mit demselben von r hinauf den Faden an das Lineal; so muß sich dasselbe so bewegen, daß die Spur des Griffels immer in der Hyperbel bleibt.

8) Die gleichseitige (oder rechtwinkelichte) Hyperbel hat beyde Axen, a und k, gleich; folglich ist alsdann, wegen der Gleichheit des $\frac{1}{2}$ a und des $\frac{1}{2}$ k, der halbe Winkel c, zwischen den Asymptoten von 45, und der ganze von 90 Grad. Auch ist alsdann p, der Parameter, einer jeden von den Axen gleich. Denn weil $a = k$, so wird (nach der zweyten Gleichung No. 1.) in diesem Falle $\frac{p^2}{4} = \frac{a^2 + k^2}{4} - \frac{k^2}{4} = \frac{a^2 + a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$. Daher p, der Parameter, $= a = k$. Eben so erkennt man, daß die allgemeine Gleichung $y^2 = \frac{v^2 k^2}{a^2} - \frac{k^2}{4}$, (wenn die Hyperbel gleichseitig ist,) in folgende: $y^2 = v^2 - \frac{k^2}{4}$, oder in $y^2 = v^2 - \frac{1}{4} a^2$ verwandelt werde.

§. 131.

Digitized by Google

§. 131.

Es ist sowohl von der Parabel, als Ellipse und Hyperbel gemeinschaftlich wahr, daß fm, oder die Linie von einem Brennpunkte f, in m, oder in einen Punkt der krummen Linie hinein, sey die Summe zweyer Theile; des ersten, welcher D, oder die Distanz des Brennpunkts von der Scheitel ist; des zweyten, welcher ein Quotient ist, nämlich das Dividend ist die durch x multiplicirte Differenz $\frac{1}{2}p - D$, wobey x die zu m gehörige Abscisse, und p den Parameter bedeutet, und der Divisor ist D. Kurz, nach dieser Beschreibung ist $fm = D + \frac{(\frac{1}{2}p - D)x}{D}$. Ich will diesen von dem grossen Euler zuerst bemerkten, und in der Astronomie brauchbaren Satz nur von der Parabel (§. 128.) beweisen, weil die andern Beweise ihm ähnlich sind. D ist in der Parabel $\frac{1}{4}p$, und $fm = x + \frac{1}{4}p$. Also $x + \frac{1}{4}p = \frac{1}{4}p + \frac{(\frac{1}{2}p - \frac{1}{4}p)x}{\frac{1}{4}p}$.

Oder $\frac{px}{4} = \frac{px}{4}$. Also ist der Satz wahr.

§. 132.

Wenn (Fig. 164.) ein Rad rollt, dessen Durchmesser D, und dessen Halbzirkel H heissen mag; so wird, indem der Punkt a nach m kömmt, eine krumme Linie R beschrieben, die ein Theil der Radlinie ist. Weil die unendlich kleinen Theile des Weges lm, einer nach dem andern, immer durch

durch einen neuen unendlich kleinen Theil des Halbzirkels H bedeckt gewesen sind; so ist klar, daß die Linie lm, oder kurz, daß die Ordinate $y = H$, und (wenn man $H = x$ nennt.) $= x$. Dieses ist wahr aus gleichem Grunde von allen oberen, der Ordinate y, parallelen Ordinaten, die von der Radlinie bis an den Halbkrais H reichen, und von allen kleinern Bogen dieses Halbkraises, als Abscissen. Daher ist die Grundgleichung für die Radlinie diese: $y = x$.

Demnach ist die Radlinie nicht algebraisch, oder aus algebraischen Functionen (§. 121.) erklärbar, sondern eine transcendentische Linie, in deren Gleichung die Functionen transcendentisch sind. Der Grund ist folgender: Ein Zirkelbogen von eben derselben Liniengrösse, kann zu unendlich vielen kleinern Winkeln (oder geringern Anzahlen der Grade) gehören, wenn die Durchmesser groß sind; und zu grössern Winkeln, wenn die Durchmesser klein sind. Wollte man aber den Durchmesser des Rades in die Gleichung der Radlinie bringen, und sagen, es sey y gleich demjenigen Zirkelbogen des Durchmessers a, der zwischen der Tangente des obern Scheitelpunktes am Zirkelkraise, und zwischen der Ordinate y liegt: so wäre dieses doch kein algebraischer Ausdruck.

Man stelle sich ein Halbrad oder einen halben Zirkel auf der erhabnen Seite mit einem Faden bedeckt vor, und daß der Halbzirkel von diesem

Faden

Faden nach und nach, aber auf solche Art befreyet werde, daß der Faden, welchen man sich an einem Endpunkte des Halbrads als befestigt denken muß, immer gespannt bleibe. Alsdann entsteht, durch die Bewegung des andern Endpunktes des Fadens, eine krumme Linie, welche man durch Evolution erzeugt nennt, wenn der Halbzirkel die Evolute heißt. Es besteht aber die durch Evolution erzeugte Linie aus lauter Punkten, davon ein jeder in die Tangente irgend eines Punkts der Evolute fällt. Und wenn der Punkt der Evolute, von dessen Tangente die Rede ist, T, hingegen der Punkt der durch Evolution erzeugten Linie, welcher in die Tangente des Evolutenpunkts T fällt, t heißt; so ist die Linie zwischen T und t, oder Tt, allemal so lang, als der von dem Faden befreyte Theil der Evolute. Wenn z. E. T der Theilungspunkt der beyden Quadranten eines Halbzirkels (den man als eine Evolute betrachten will) ist; so ist die Linie Tt, deren Endpunkt t in die durch Evolution erzeugte krumme Linie fällt, eben so lang, als der Bogen eines Quadranten. Man kann sich aber eine jede krumme Linie als eine Evolute vorstellen, durch deren Evolution eine andre krumme Linie erzeugt wird.

§. 133.

Noch andrer Linien muß ich kürzlich erwehnen. Eine Muschellinie (Fig. 165.) wird auf folgende Art. Man mache eine gerade Linie A B, und theile sie durch c m n, rechtwinkeliche

sicht. Nun ziehe man aus dem Anfangspunkte c durch AB so viel Linien als man will, je näher, je besser, ich sage solche Linien, daß von jedem Endpunkte derselben bis in AB, eben so weit sey, als von n nach m. Hierauf ziehe man alle Endpunkte zusammen. So ist die entstehende krumme Linie die obere Muschellinie Q n Z. Aber die untere Muschellinie V p W entsteht, wenn man alle aus AB nach c hinzielende Linien der Linie m p gleich macht und die Endpunkte zusammen zieht.

Man theile den Umkreis des äussern Zirkels (Fig. 166.) in verschiedene gleiche Theile durch Hülfe der Halbmesser a, b, c, d, e, f, z. E. in 6 Theile. Hernach theile man in eben so viel Theile, einen Halbmesser; jeder Theil desselben mag t heissen. Wenn nun, von dem Halbmesser a an gerechnet, der erste Halbmesser einen Durchschnitt in der Entfernung 1 t (von dem Mittelpunkte) der zweyte in 2 t ... der sechste in 6 t bekömmt; so sind die Durchschnitte der Halbmesser in der Archimedischen Spirallinie, deren Zwischenpunkte bestimmt werden, wenn man die Theile des Umfangs und folglich des Halbmessers oder der Theile t sehr viele macht.

Von der Logistik oder Logarithmischen Linie ist Zahlenk. §. 136. zur Gnüge gehandelt. (Man sehe Fig. 169, 170.)

§. 134.

Wenn (Fig. 167.) eine krumme Linie A m B zwey Theile hat, deren einer, A m die hohle, deren andrer m B die erhabne Seite eben derselben Axe A n zukehrt; so heißt m, oder der Scheide-

Digitized by Google

punkt der Theile, dessen Ordinate m p oder y ist, der Wendungspunkt. Die weiter nach der Rechten und Linken folgenden Ordinaten p m und p m haben alsdann kleinere Reste ihrer Subtangenten, nachdem ihre Abscissen davon subtrahirt sind. Kurz, (Fig. 153.) sie haben kleinere Linien A T, weil sowohl die Tangenten der Punkte an der linken Seite, des Punkts m (Fig. 167.) als die Tangenten der nächsten Punkte an der rechten Seite des Punkts m zwischen A und T fallen. Also ist die zu der Ordinate y oder m p gehörige A T, oder §. 125. die zu ihr gehörige $(ydx : dy) - x$ in ihrer Art das Größte. Wenn nun eine solche Linie eine bekannte Grundgleichung hat; so darf man, um das zu der Ordinate m p oder zu y gehörige x zu finden, nur $(ydx : dy) - x$ abermals differenziren, und (§. 126.) das Differenzial der Nulle gleich setzen; so wird das gesuchte x zu der größten A T, oder zu der Ordinate des Wendungspunktes gefunden. Es zeigt aber diese Differenzirung, daß ddy Nulle sey. Denn weil dx beständig einerley bleibt; so ist das Differenzial von $ydx : dy - x$. $= \frac{(dy)^2 dx - ydx\,ddy}{dy^2} - dx$. Ist dieses $= 0$; so ist auch $- ydx\,ddy$ und folglich ddy der Nulle gleich.

Ist aber die krumme Linie nicht A m B, sondern A m i (Fig. 167.) so heißt der Punkt m nicht der Wendungspunkt, sondern der Wiederkehrpunkt. Alsdann nehmen die Ordinaten, (zwischen der Axe und dem Bogen A m) die bey A anfangen

Digitized by Google

fangen, zu, bis an die Ordinate des Punkts m; die fernern Ordinaten, deren Abscissenpunkte auf der Axe rückwerts gehen, und welche von der Axe an, bis in irgend einen Punkt des Bogens m i reichen, nehmen ab. Aber das x, oder die Abscisse des Punkts m, ist alsdann ein Größtes, weil, nachdem die Ordinate m p geworden ist, die folgenden Ordinaten abermals kleinere Abscissen bekommen. Also bey solchen Umständen giebt die Setzung, daß $dx = o$ sey, dasjenige x zu erkennen, welches zu der Ordinate des Wiederkehrpunktes gehört.

Ein Exempel, die Abscisse x zu dem Wiederkehrpunkte m zu finden, sey folgendes: Wenn die Regel der Linie ist, daß $y - a = f(x - a)^{\frac{3}{2}}$. So sind die Differenzialien $dy = \frac{3}{2} dx : (x - a)^{\frac{2}{3}}$. Und wenn dx als beständig gilt; so ist $ddy = -\frac{3}{2} dx \cdot \frac{2}{3} dx : (x - a)^{\frac{5}{3}}$

$= \frac{6}{2^5} (dx)^2 : (x - a)^{\frac{7}{3}}$. Sollte das Nulle seyn; so müßte (da weder $\frac{6}{2^5}$ noch $(dx)^2$ Nulle ist) der Divisor $(x - a)^{\frac{7}{3}}$, folglich auch $x - a$, folglich x, etwas Unendliches seyn, wodurch man keinen Wiederkehrpunkt findet. Aber setzt man nach der Differenzialgleichung, (welche war $dy = \frac{3}{2} dx : (x - a)^{\frac{2}{3}}$) das Differenzial $dx = o$, weil x ein Größtes ist: so findet man daraus, daß $(x = a)^{\frac{2}{3}} dy = o$ seyn müsse, und daß folglich, (da dy nicht Nulle ist) $(x - a)^{\frac{2}{3}}$, folglich daß

x — a der Nulle gleich, und daß daher x, oder die zu dem Punkte m gehörige Abscisse, gleich dem beständigen a seyn müsse.

§. 135.

Noch etwas Weniges von geometrischen Oertern, und deren ehemaligem Gebrauche. Eine Gleichung, wie $y^2 = ax + mx$, welche mehr als eine unbekannte Grösse enthält, heißt **unbestimmend**. Enthält sie nur zwey, wie die Grundgleichung des Zirkels $yy = ax - xx$; so heißt ein **geometrischer Ort** diejenige Linie, von deren Abscissen x und von deren Ordinaten y eine solche Gleichung wahr ist, oder (um allgemeiner zu reden,) diejenige Linie oder Verbindung von mehr Linien, durch deren Hülfe man gerade Linien machen kann, die als Functionen von einander (§. 121.) die gegebne Gleichung zulassen. Also sind die geometrischen Oerter, **bald gerade Linien, bald Winkel, bald krumme Linien**, z. E. der Zirkelkrais, die Parabel, u. s. w. und insgesammt Hülfsmittel, Linien x und y zu schaffen, von denen eine gegebne Gleichung wahr ist. **Einen geometrischen Ort beschreiben** aber heißt, in dieser Absicht die Hülfslinie oder Hülfsfigur ziehen. Z. E. Der mit dem Durchmesser a beschriebene Zirkelkrais giebt in den Abscissen und Ordinaten der Axe Exempel von Linien x und y, von denen folgende in verschiedene Gestalt veränderte Gleichung wahr ist, $y^2 = ax - xx$; oder $y^2 = x(a - x)$ oder $y = \sqrt{ax - x^2}$; oder $y^2 + x^2 = ax$, oder $x^2 = ax - y^2$. Verlangte

sucht man x und y von solcher Beschaffenheit, daß $y^2 = xa$, oder daß $y^2 : a = x$, oder daß $y^2 : x = a$, oder daß $y = \sqrt{ax}$; so dürfte man nur eine Parabel mit dem Parameter a beschreiben. Alle rechtwinkelichte Coordinaten an der Axe derselben (§. 128.), sind solche y und x.

Eine bestimmende Gleichung hat nur ein einziges Zeichen unbekannter Grösse, wie $z^3 + az = b$, oder $z^3 + az - b = 0$. Eine solche Gleichung verzeichnen oder construiren, heißt durch Hülfe geometrischer Oerter Linien finden, welche, (wenn bestimmte Linien anstatt der bekannten Grössen der Gleichung gesetzt werden) mit Wahrheit die Bedeutung oder Wurzel des unbekannten Zeichens, oder mit einem Worte, Wurzeln der Gleichung seyn können. Z. E. 1) Es sey gegeben $y - d = \frac{ab}{c}$. So ist e, als die vierte Proportionallinie zu a, b, c, $= \frac{ab}{c}$. Zu derselben Linie e oder $\frac{ab}{c}$ addire man d; so hat man y. 2) Es sey bekannt, daß $yy = ay + bc$. Es ist y alsdann bekannter Massen gleich $\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + bc}$. Man wähle für bc das d^2, das ihm gleich ist; so ist $y = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + d^2}$. Man setze zwey Linien, wie $\frac{1}{2}a$ und d rechtwinkelicht zusammen; so ist die Hypothenuse oder h gleich dieser Wurzel $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + d^2}$, nach dem Pyth. Satze. Und $y = \frac{1}{2}a \pm h$. Hier ist also der geometrische Ort ein rechtwinkelichter

sichter Triangel oder ein rechter Winkel. Sind die gegebnen und verlangten Grössen nicht Linien sonder Zahlen. Z. E. $yy = 4y + 32$, folglich $y = 2 \pm \sqrt{4^2 + 32} = 2 \pm 6$; so liesse sich doch, wenn man keine bessere Mittel wüßte, durch Wahl einer Linieneinheit, nach welcher die Linie $\frac{1}{2}a = 2$, und $d = \sqrt{32}$ wäre, durch die geometrische Zeichnung eine Linie h finden, die mit $\frac{1}{2}a$ (entweder als ein positiver, oder als ein negativer Theil) zusammensetzt, so viel solche Einheiten hätte, als in der Zahl y sind, die man sucht, und welche zweyerley seyn kann. Dieses erwähne ich nur, um an einem sehr leichten Exempel zu zeigen, wie man sich vormals, als man noch die Infinitesimalrechnung und die Mittel der Annäherung zum Wehrte der Wurzel einer Gleichung nicht wußte, der geometrischen Zeichnung bedient habe, auch solche Gleichungen von höherer Ordnung, (als cubische, biquadratische) aufzulösen, wodurch nicht Linien, sondern Zahlen gesucht wurden.

§. 136.

Beschwerlich und unsicher ist eine solche Construction cubischer, biquadratischer und höherer Gleichungen, die durch Hülfe krummer Linien, und gemeiniglich des Zirkelkraises und der Parabel geschicht. Daher gefiel anfangs Cardans Regel zur Auflösung der cubischen Gleichungen. Beym Gebrauche derselben wird aber vorausgesetzt, in der Gleichung fehle das zweyte, oder das quadratische

tische Glied, welches man nach der (in der Zahlk. §. 76. und 148.) gewöhnlichen Art weggeschafft habe; daher alsdann die allgemeine Form einer cubischen Gleichung ist $x^3 + px + q = o$. Es bedeutet hier p den bekannten Coefficienten der ersten Potenz des x, und q bedeutet das gänzlich bekannte letzte Glied; das Pluszeichen aber kann bestehen, so wohl wenn p, oder q, oder beydes positive, als auch, wenn sie negative Grössen sind. Denn $+(-q)$ ist bekannter Massen $-q$.

Nach Cardans Regel nun, müssen wir, wenn x die unbekannte Grösse der cubischen Gleichung ist, zwey Zahlen, y und z, von der Beschaffenheit denken, daß $y + z = x$, und daß $3yz = (-p)$. Alsdann ist $3y(x - y)$ oder $3yx - 3y^2 = -p$, oder es ist $y^2 - yx = \frac{p}{3}$, und $y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{p}{3}}$. Wenn nämlich die grössre Zahl $y = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{p}{3}}$ ist; so ist die kleinere $z = \frac{1}{2}x - \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{p}{3}}$. Also sey der Wehrt $y + z$ für x, und der Wehrt $-3yz$ für p, oder $3yz$ für $-p$, gebraucht, die Gleichung $x^3 + px + q = o$ zu verändern, in $y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + p(y + z) + q = o$. Oder $y^3 + 3yz \cdot (y + z) + z^3 - (3yz \cdot (y + z)) + q = o$. So wird $y^3 + z^3 + q = o$. Hieraus folgt (weil $3yz$ auch $= -p$) daß $z^3 = -\frac{p^3}{27y^3} = y^3$

Digitized by Google

$= -y^6 + q$. Daher ist $\left(\frac{p}{3}\right)^3 = y^6 + qy^3$.

Folglich $\frac{1}{4}q^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = (y^3 + \frac{1}{2}q)^2$. Oder

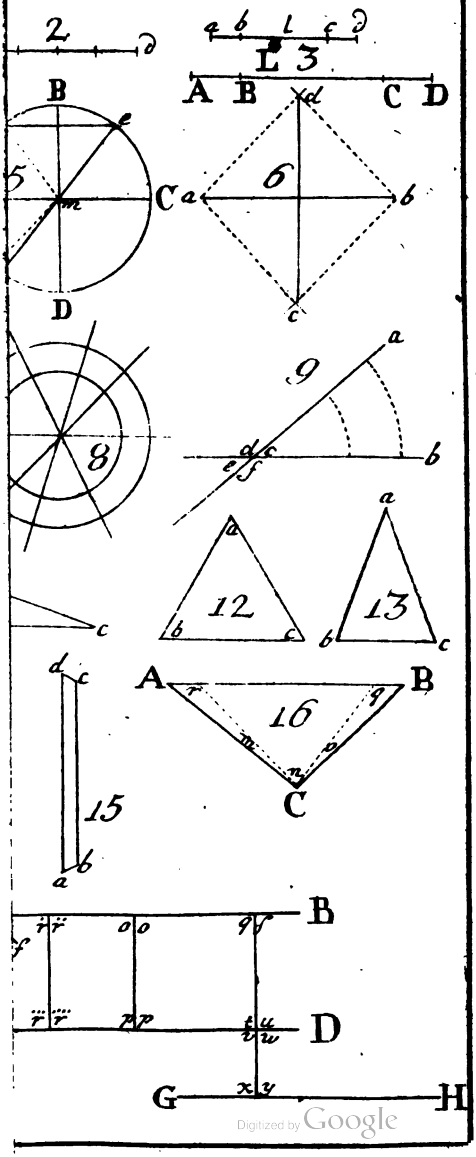
$y = \left(-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)^{1:3}$. Doch

weil y die größte der Zahlen seyn soll; so sey die Quadratwurzel positiv genommen. Weil nun $z^3 = -y^3 - q = \left(\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}}\right)$

$-q = \left(-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}}\right)$; so ist $z = \left(-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}}\right)^{1:3}$. Daher erkennt man endlich x oder $y + z = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} + \left(-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)$.

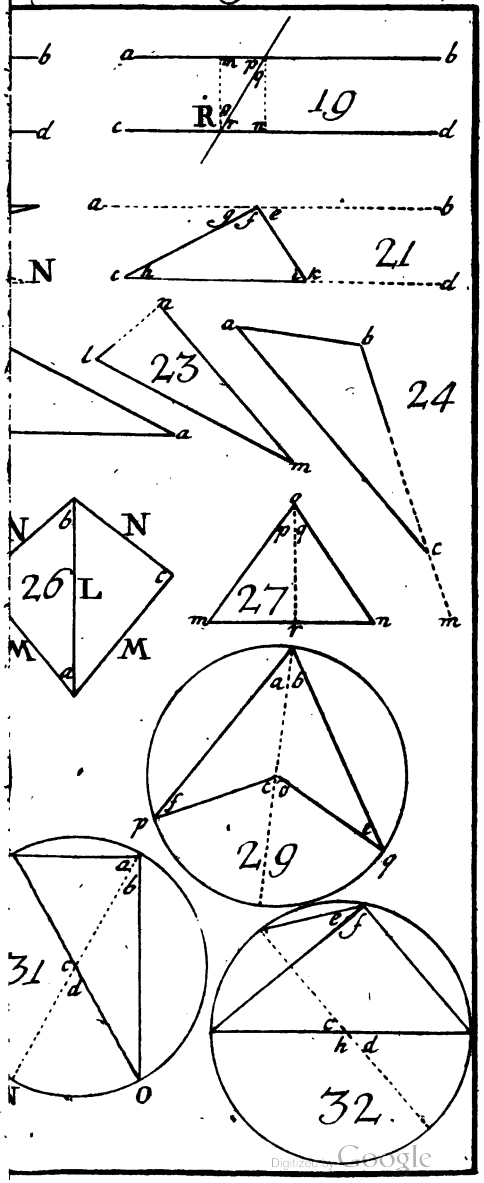
Wenn z. E. $p = -4$ und $q = -40$ ist, wie in der Gleichung $x^3 - 4x - 40 = 0$; so findet man, (wenn man nach der Cardanischen Regel verfährt, und zuletzt die Cubikwurzeln, welche y und z vorstellen, aufhebt,) die Zahl 4 als eine Wurzel der Gleichung $x^3 + px + q = 0$. Es ist aber aus diesem Exempel sichtbar gnug, daß die Cardanische Regel kein sehr bequemes Hülfsmittel sey, da sie uns beständig durch Irrationalgrössen führet, deren Bedeutung zuletzt doch durch die Regel der Annäherung muß gefunden werden. Kurz, Cardans Regel ist mehr berühmt als brauchbar.

Digitized by Google



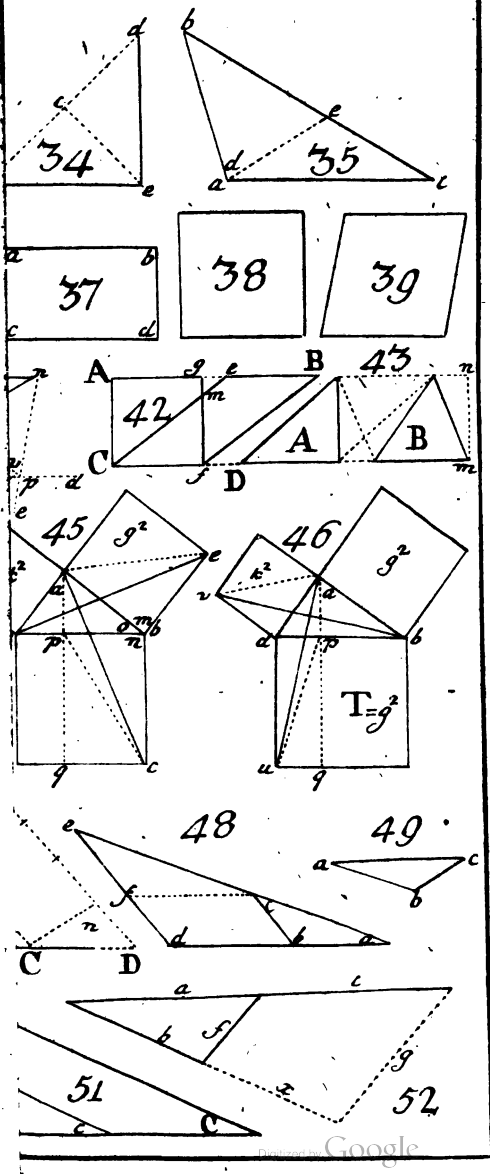
Digitized by Google

Digitized by Google



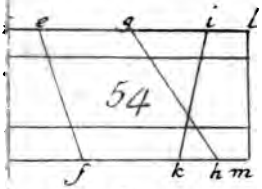
Digitized by Google

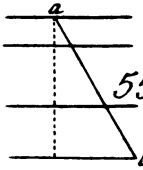
Digitized by Google

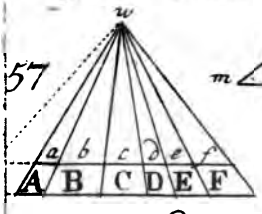


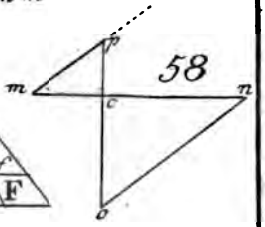
Digitized by Google

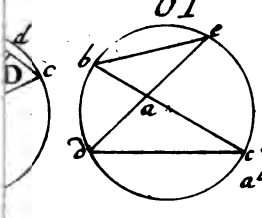
Digitized by Google

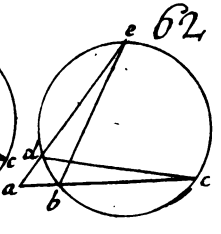


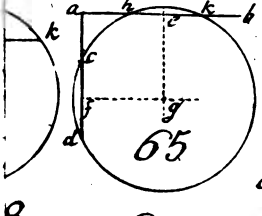


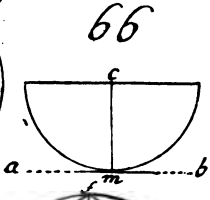


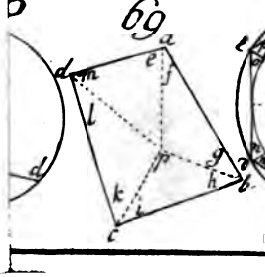


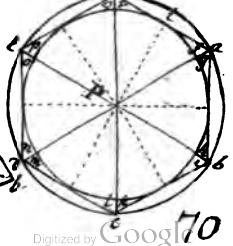






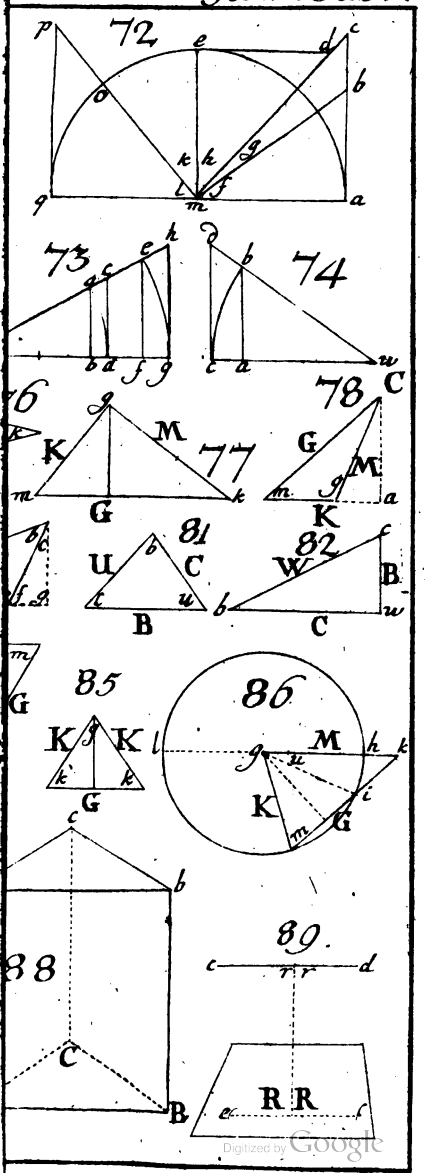






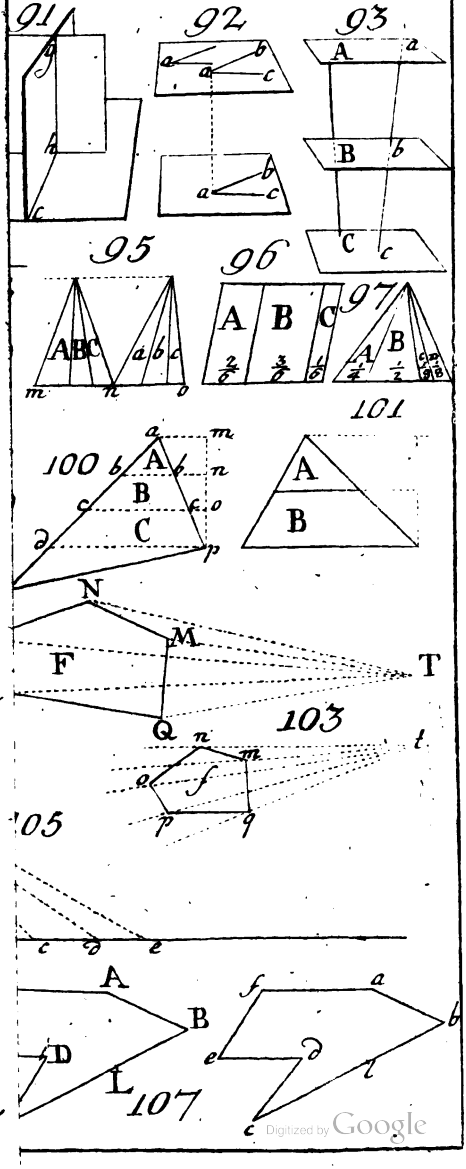
Digitized by Google

Digitized by Google



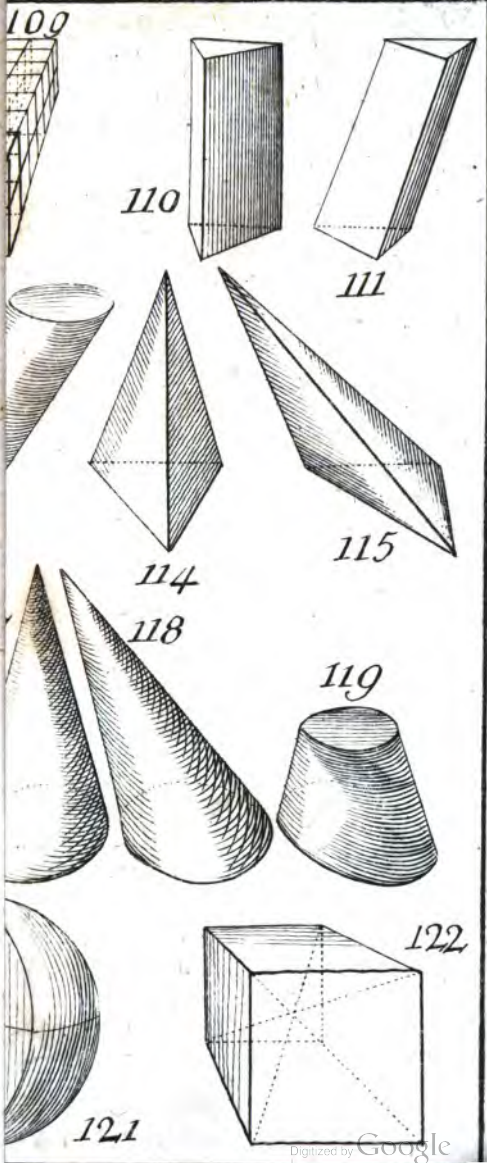
Digitized by Google

Digitized by Google



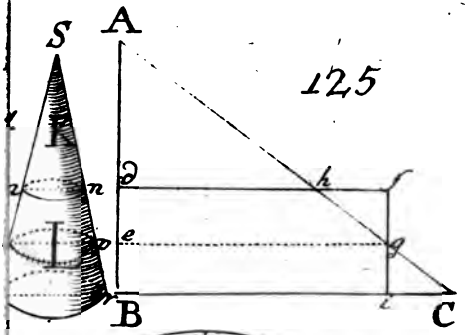
Digitized by Google

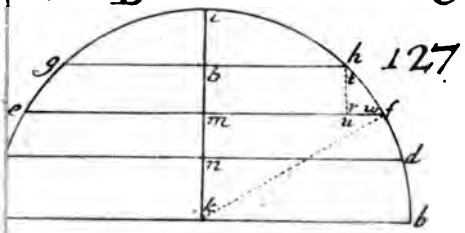
Digitized by Google

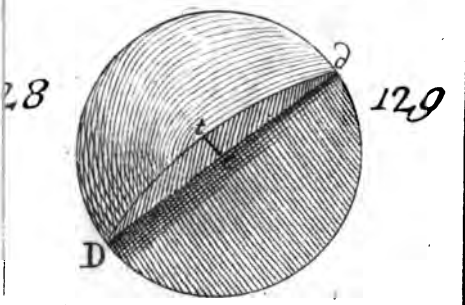


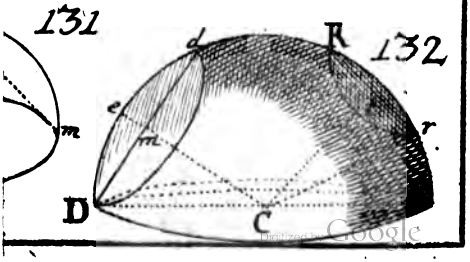
Digitized by Google

Digitized by Google

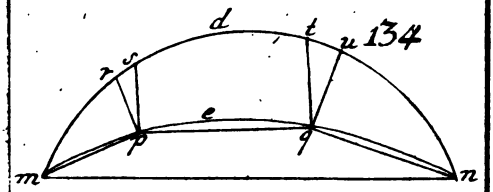

S
A
125
n
h
e
g
B
C

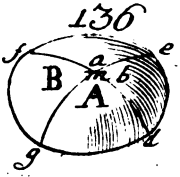

g
h
127
e
m
d
b

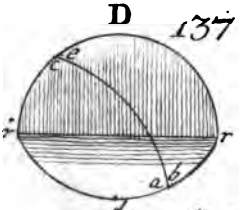

28
129
D

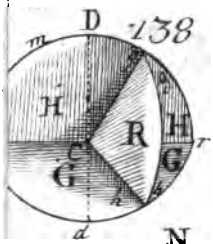

131
132
m
e
m
D
C

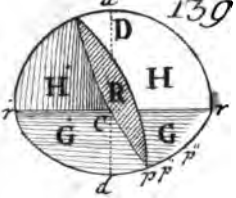
Digitized by Google

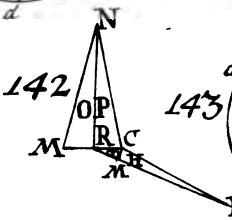


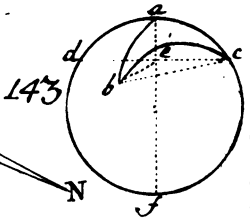


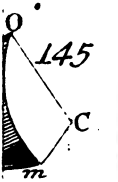


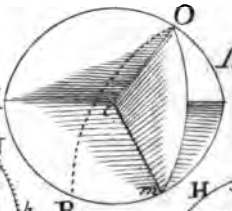


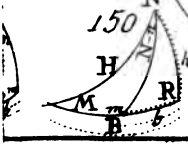


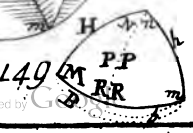






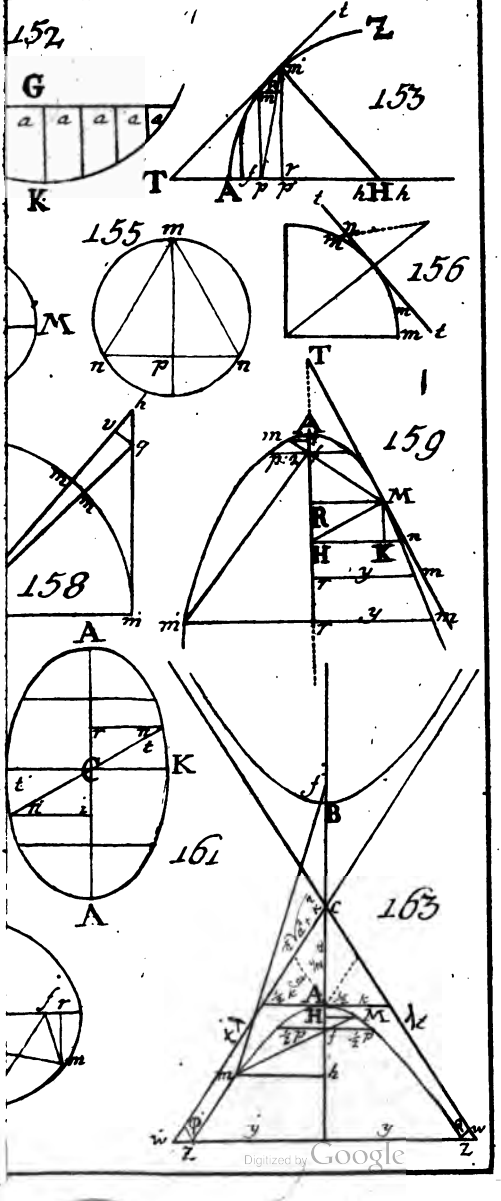




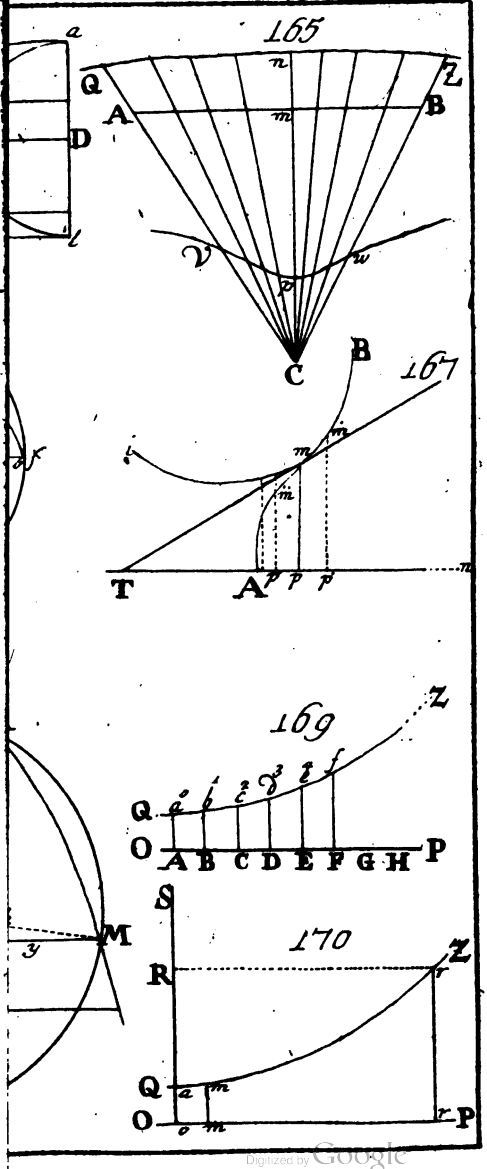


Digitized by Google

Digitized by Google


152
G
a a a a
K
153
T
A
155
M
156
158
159
161
163
Digitized by Google

Digitized by Google



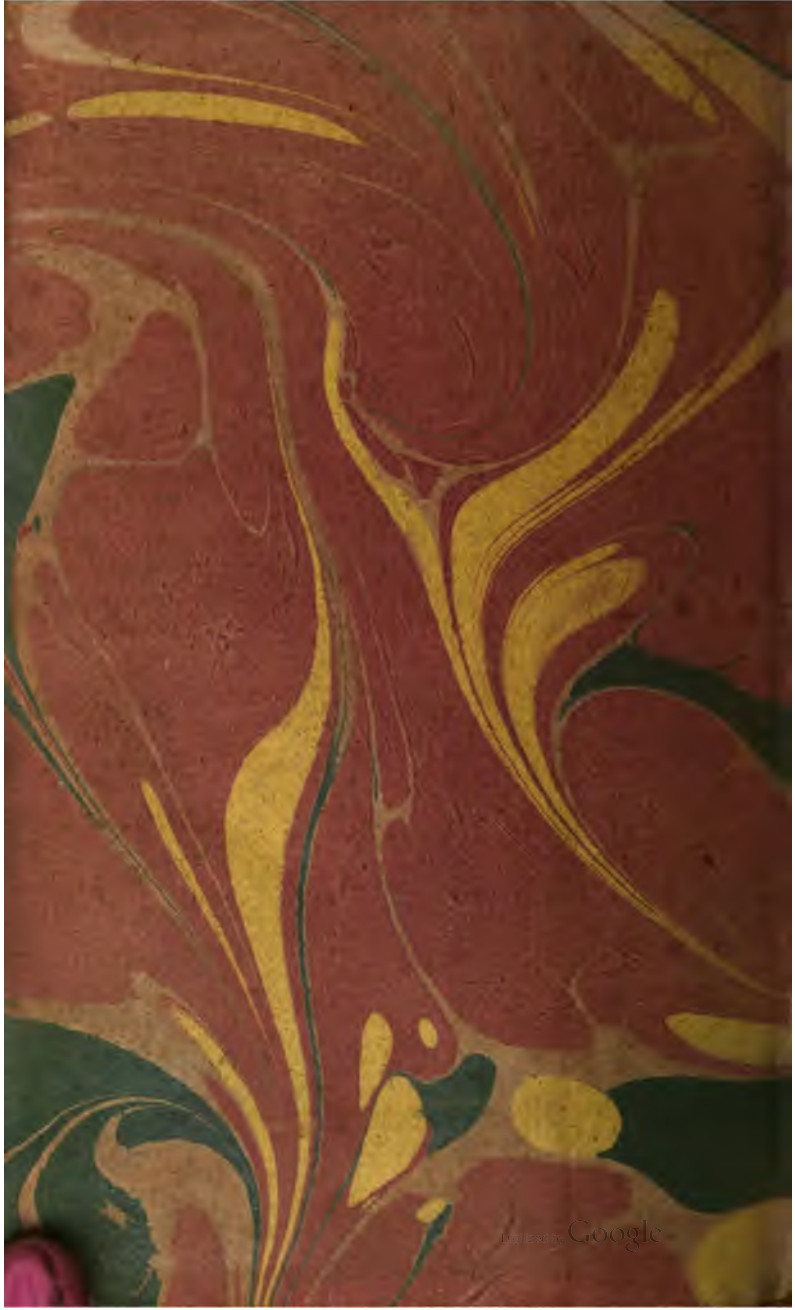
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google


Digitized by Google